Université Aboubekr Belkaid-Tlemcen

1ère Année Sciences et Technologies

Module : Math 1- Tronc commun Sciences et Technologies

Série de TD n°04-Développements Limités

Exercice 01 : En utilisant la formule de Taylor, développer les fonctions suivantes à l'ordre 3:

$$1) f(x) = \frac{1}{1-x} \quad au\ voisinage\ de\ x_0 = -1 \quad 2) g(x) = e^{\sqrt{x}} \quad au\ voisinage\ de\ x_0 = 1$$

$$3) (\boldsymbol{supp.}) h(x) = \ln(\sin x) \quad au\ voisinage\ de\ x_0 = \frac{\pi}{3}$$

Exercice 02 : Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

$$1)\ e^x \ln(1+x) \qquad 2) \frac{x+1}{x^2+x+2} \qquad 3) \ln(1+\sqrt{1+x})$$

$$4) e^{\sin x} \qquad 5)\ \frac{1}{1+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \qquad 6)\ (1+x)^{\frac{1}{1+x}}$$

Exercice 03 : Déterminer les développements limités suivants :

$$1)\ DL_4\left(\frac{\pi}{4}\right)\ de \sin x \qquad 2)\ DL_4(1)\ \ de\ \frac{\ln x}{x^2}$$

$$3)\ DL_3(1)\ \ de\ \cos(\ln(x))$$

Exercice 03 : A l'aide des développements limités, calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x\to 0} \frac{x - Arctgx}{xArctgx} \qquad 2) \lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(\sin x)^2}) \qquad 3) \lim_{x\to 0} (\sin x)^{tg^2 x}$$

$$4) \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4} \qquad 5) \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x \qquad 6) \lim_{x\to +\infty} x^3 \ln\left(\cos\frac{1}{x}\right) + \frac{x^2}{2}\sin\frac{1}{x}$$

$$7) \lim_{x\to 1} \frac{a^{\ln x} - x}{\ln x} \qquad 8) \lim_{x\to 1} (x)^{\frac{1}{1-x}} \qquad 9) \lim_{x\to +\infty} \ln(x) \ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)$$

Exercice 04 : Soit la fonction $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-2)(x+3)}$

Déterminer, si elles existent, les asymptotes à la courbe représentative de f. Etudier la position de la courbe par rapport à ses asymptotes.

Développements Limités, autour de 0, des fonctions usuelles

Formule
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
$tg\, x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$
$Ch\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
$Sh\, x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$
$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \cdots + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^n + o(x^n)$
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$
$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + o(x^n)$
$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
$Arctg\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$
$Argth\, x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$
$Arcsin\, x = x + \frac{1}{2.}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$