Table des Matières

.

Avant-propos

Cet ouvrage est le fruit d'une longue expérience d'enseignement des troncs communs (SETI – MI – ST- SM- écoles supérieures).

J'ai vu que les étudiants ont des lacunes pour apprendre les mathématiques surtout dans l'aspect raisonnement c'est-à-dire comprendre les choses mais comment je commence à écrire la réponse? D'où le grand problème pour l'étudiant est la rédaction des idées.

Pour cela j'ai essayé de guider l'étudiant par un style assez simple à comprendre dont l'objet est de donner une explication complète et formelle. Chaque chapitre est articulé autour d'un mini cours qui simplifie l'information suivi par des exemples d'applications et une variété d'exercices qui servent à illustrer la théorie.

Je tiens à remercier tous mes collègues d'université de Tlemcen qui mon pousser à finaliser ce travail.

Chapitre 1

Formules de Taylor - Développements limités

On peut généraliser le théorème des accroissements finis par une formule dite de Taylor, qui est un outil surtout dans le calcul des limites des fonctions ou on a des formes indéterminées.

1.1 Formules de Taylor

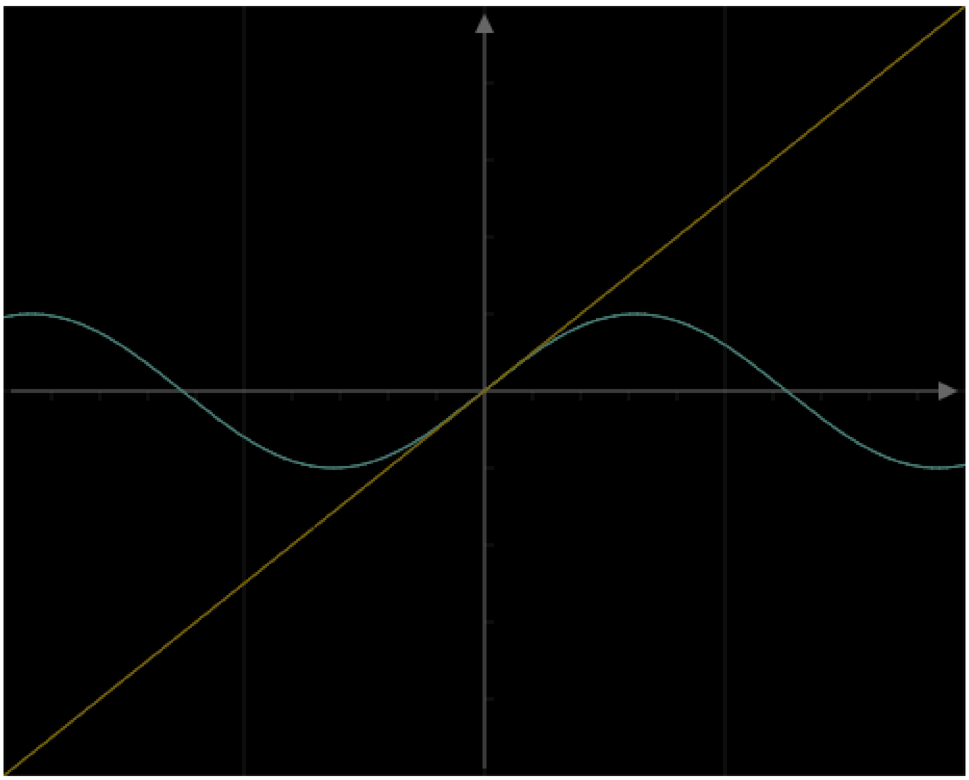
1.1.1 Théorème des accroissements finis

Théorème 1.1 *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$,dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe une constante $c \in \,]a,b[$ telle que:*

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(c).$$

1.1.2 Fonction de classe C^n

Proposition 1 *Une fonction de classe C^n, est une fonction continue et admet des dérivées continues jusqu'à l'ordre n. Et on dit également que f est n fois continûements dérivables, de plus les fonctions qui sont infiniments dérivables et les dérivées consécutifs sont continues sont dites des fonctions de classes $C^\infty(\mathbb{R})$, par exemples: $e^x, \cos x, \sin x, ...$*



1.1.3 Formule de Taylor-Lagrange

Théorème 1.2 *Soit f une fonction de classe C^n sur $[a,b]$, admet une dérivée d'ordre $(n+1)$ sur $]a,b[$, alors il existe une constante c de $]a,b[$ telle que:*

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + \frac{(b-a)}{1!} f'(a) + ... + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) . \\ &= \sum_{p=0}^{n} \frac{(b-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) . \end{aligned}$$

Cette formule est connue par la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n. Dont la partie:

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{(b-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) ,$$

est appelée la partie régulière de Taylor *et le terme:*

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) ,$$

est appelé le reste de Lagrange.

Remarque 1.1 *Si on pose: $n = 0$ dans la formule de* Taylor-Lagrange*, on trouve l'égalité du théorème des accroissements finis.*

1.1.4 Formule de Maclaurin-Lagrange

Théorème 1.3 *C'est la formule de* Taylor-Lagrange *avec $b = x, a = 0$ et $c = \theta x$ où $0 < \theta < 1$, c'est à dire, sous les mêmes hypothèses du théorème de* Taylor-Lagrange *on a:*

$$\forall x \in I = [0,x] , \; f(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!} f^{(p)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \;\; \text{avec } 0 < \theta < 1.$$

1.1.5 Formule de Taylor-Young

Théorème 1.4 *Soit f définie sur un intervalle I, admettant en un point $a \in I$ des dérivées continues jusqu'à l'ordre n. Alors il existe un voisinage V de a et une fonction $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ tels* *que:*

$$\begin{aligned}\forall x \quad \in \quad & V,\ f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!}f'(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x) \ \ avec \ \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0. \\ = & \sum_{p=0}^{n} \frac{(x-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x) \ \ avec \ \lim_{x\to a}\varepsilon(x) = 0.\end{aligned}$$

C'est la formule de Taylor avec un reste de YOUNG $((x-a)^n \varepsilon(x))$.

Remarque 1.2 *La formule de* TAYLOR-YOUNG *permet d'écrire des fonction au voisinage des points sous forme polynômiale, cette écriture introduit la notion du développement limité.*

1.2 Développements limités au voisinage d'un point a ou l'infini

Définition 2 *Soit f une fonction définie au voisinage d'un point a, sauf peut-être en a. On dit que f admet un développement limité au voisinage de a à l'ordre n noté $(DL_n(a))$ s'ils existes des nombres réels $\alpha_k, 0 \leq k \leq n$, et une fonction ε tels que pour tout élément $x \in I \subset \mathbb{R}$ on a:*

$$f(x) = \alpha_0 + a_1(x-a) + ... + \alpha_n (x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x-a) \ \ ,avec \ \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0.$$

où:

$$\alpha_0 + \alpha_1(x-a) + ... + \alpha_n(x-a)^n,$$

est la partie régulière du $(DL_n(a))$, et elle est unique et:

$$(x-a)^n \varepsilon(x-a) \ \ \text{est le reste du } (DL_n(a)), \text{ on peut l'écrire } o((x-a)^n),$$

$$avec \ \lim_{x\to x_0} \frac{o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

1) Si $a = 0$ on a:

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + ... + \alpha_n x^n + x^n \varepsilon(x), \ avec \ \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

2) Si $a = \pm\infty$ on pose dans la formule du DL au voisinage de 0, $X = \frac{1}{x}$, et on aura:

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{1}{x} + ... + \alpha_n \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) \text{ ,avec } \lim_{x\to\pm\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

3) Si $a \neq 0$, il suffit de faire le changement de variable $X = x - a$, si $x \to a$ alors $X \to 0$.

Remarque 1.3 *On peut déterminer la formule du DL à l'aide de la formule de* Taylor-Young*, alors sous les hypothèses de la formule de* Taylor-Young *on a:*

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \alpha_0 + \alpha_1 (x - x_0) + ... + \alpha_n (x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon (x - x_0) \text{ ,avec } \lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon (x - x_0) = 0. \\ \text{avec} & : & \alpha_0 = f(0) \text{ et } \alpha_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \text{ où } 1 \leq k \leq n. \end{array}$$

Exemple 1.1 *Trouver le $(DL_3(0))$ de la fonction $f(x) = \sin x$, en effet:*

$$f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x \text{ et } f^{(3)}(x) = -\cos x.$$

D'où:

$$\begin{aligned} \sin x &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + o\left(x^3\right), \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right). \end{aligned}$$

Exemple 1.2 *Trouver le $(DL_4(2))$ de la fonction $f(x) = e^x$, en effet:*

$$f^{(n)}(2) = e^2, 1 \leq n \leq 4.$$

D'où:

$$\begin{aligned} e^x &= f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f^{(3)}(2)}{3!}(x-2)^3 + \frac{f^{(4)}(2)}{4!}(x-2)^4 + o\left((x-2)^4\right), \\ &= e^2 + e^2(x-2) + \frac{e^2}{2!}(x-2)^2 + \frac{e^2}{3!}(x-2)^3 + \frac{e^2}{4!}(x-2)^4 + o\left((x-2)^4\right). \end{aligned}$$

Exemple 1.3 *Trouver le* $(DL_4(+\infty))$ *de la fonction* $f(x) = \cos\frac{1}{x}$*, en effet, on pose:*

$$X = \frac{1}{x},\ \textit{si } x \to +\infty \Rightarrow X \to 0 \ \textit{avec } f(X) = \cos X.$$

$$f'(X) = -\sin X, f''(X) = -\cos X,\ f^{(3)}(X) = \sin X \ \textit{et } f^{(4)}(X) = \cos X.$$

D'où:

$$\begin{aligned}\cos X &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}X + \frac{f''(0)}{2!}X^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}X^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}X^4 + o\left(x^3\right),\\ &= 1 - \frac{X^2}{2!} + \frac{X^4}{4!} + o\left(X^4\right).\end{aligned}$$

ce qui donne:

$$\cos\frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{4!}\left(\frac{1}{x^4}\right) + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

1.2.1 Principaux développements limités

Les fonctions suivantes admettent un DL au voisinage de 0.

$$\begin{aligned}
1)\ e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \text{ avec}\\
\lim_{x\to 0}\frac{o(x^n)}{x^n} &= 0, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ (l'ordre n)}\\
2)\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^p\,\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o\left(x^{2p+1}\right) \text{ avec}\\
\lim_{x\to 0}\frac{o\left(x^{2p+1}\right)}{x^{2p+1}} &= 0, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ (l'ordre 2p+1)}\\
3)\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^p\,\frac{x^{2p}}{(2p)!} + o\left(x^{2p}\right) \text{ avec}\\
\lim_{x\to 0}\frac{o\left(x^{2p}\right)}{x^{2p+1}} &= 0, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ (l'ordre 2p)}\\
4)\ (1+x)^m &= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{m(m-1)...(m-p+1)}{p!}x^p + o(x^p),\\
\forall x &\in \left]-1, +\infty\right[, m \in \mathbb{R} - \mathbb{N}\\
\text{et si } m &\in \mathbb{N} \text{ alors: } (1+x)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k x^k \text{ (Formule du binôme dont le reste est nul).}\\
5)\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n-1}\,\frac{x^n}{n} + o(x^n)
\end{aligned}$$

1.2.2 Propriétés des développements limités

Parité

proposition 1.1 *Si f est une fonction paire (resp impaire) alors dans la partie régulière du DL on trouve que les puissances paires (resp impaires).*

Continuité

proposition 1.2 *Si f admet un DL d'ordre n de partie régulière $a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ alors*

$$\lim_{x \to 0} f(x) = a_0 \text{ d'où } f \text{ est continue en 0 ou est prolongeable par continuité en 0.}$$

Dérivabilité

proposition 1.3 *Si f admet un DL d'ordre n de partie régulière $a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ $(n \geq 1)$ alors f est dérivable en 0 et $f'(0) = a_1$.*

1.2.3 Opérations sur les développements limités

Soient f une fonction qui admet un $(DL_n(a))$ de partie régulière P_n et g une autre fonction qui admet un $(DL_m(a))$ de partie régulière Q_{m} avec $c = \min(n, m)$ alors on a les propriétés sur les opérations suivantes:

La somme

proposition 1.4 *$f + g$ admet un D.L à l'ordre c de partie régulière $P_c + Q_c$.*

Exemple 1.4 *Si:*

$$f(x) = 1 - 2x + 3x^2 + 5x^3 + o\left(x^3\right) \text{ et } g(x) = 2 + 4x - 5x^2 + o\left(x^2\right),$$

alors:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= (1+2) + (-2+4)x + (3-5)x^2 + o\left(x^2\right), \text{ (l'ordre le plus petit)} \\ &= 3 + 2x - 2x^2 + o\left(x^2\right).\end{aligned}$$

Le produit par un scalaire

proposition 1.5 *$\lambda\times$ f admet un D.L à l'ordre n de partie régulière $\lambda \times P_n$.*

Exemple 1.5

$$f(x) = 1 - 2x + 3x^2 + 5x^3 + o\left(x^3\right),$$

alors:

$$4f(x) = 4 - 8x + 12x^2 + 20x^3 + o\left(x^3\right).$$

Le produit

proposition 1.6 *$f\times g$ admet un DL à l'ordre c de partie régulière R_c, obtenue en ne conservant dans $P_n \times Q_m$ que les monômes de degré p avec $p \leq c$.*

Exemple 1.6

$$f(x) = 1 - 2x + 3x^2 + 5x^3 + o\left(x^3\right) \text{ et } g(x) = 2 + 4x - 5x^2 + o\left(x^2\right),$$

alors:

$$\begin{aligned}(f \times g)(x) &= \left(1 - 2x + 3x^2\right) \times \left(2 + 4x - 5x^2\right) + o\left(x^2\right), \text{ (l'ordre le plus petit)} \\ &= \left(2 + 4x - 5x^2 - 4x - 8x^2 + 6x^2\right) + o\left(x^2\right) \\ &\quad \text{(prendre dans la distribution que les puissances inférieure ou égale à 2)} \\ &= 2 - 7x^2 + o\left(x^2\right).\end{aligned}$$

Le quotient

proposition 1.7 *$\frac{f}{g}$ admet un DL à l'ordre c de partie régulière R_c qui est la division suivant les puissances croissantes à l'ordre c de f par g.*

Exemple 1.7

$$f(x) = 1 - 2x + 3x^2 + 5x^3 + o\left(x^3\right) \text{ et } g(x) = 2 + 4x - 5x^2 + o\left(x^2\right),$$

$1-2x+3x^2+5x^3$	$2+4x-5x^2$
$-1-2x+\frac{5}{2}x^2$	$\frac{1}{2}-2x+\frac{27}{4}x^2$
$-4x+\frac{11}{2}x^2$	
$+4x+8x^2$	
$\frac{27}{2}x^2$	

ce qui implique que

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{2}-2x+\frac{27}{4}x^2+o\left(x^2\right).$$

Le composée

proposition 1.8 *$f\circ g$ admet un DL à l'ordre c de partie régulière R_c, obtenue en ne conservant dans $P_n\circ Q_m$ que les monômes de degré p avec $p\leq c$, en remplaçant dans le DL de la fonction f les x par le DL de g.*

Exemple 1.8

$$f(x)=1-2x+3x^2+5x^3+o\left(x^3\right)\ \ et\ g(x)=2+4x-5x^2+o\left(x^2\right),$$

alors:

$$\begin{aligned} f\circ g(x)=f(g(x)) &= 1-2\left(2+4x-5x^2\right)+3\left(2+4x-5x^2\right)^2+o\left(x^2\right) \\ &= 1-4-8x+10x^2+3\left(4+16x^2+16x-10x^2\right)+o\left(x^2\right) \\ &\quad (prendre\ que\ les\ monomes\ de\ degré\ \leq 2) \\ &= 9+8x+16x^2+o\left(x^2\right). \end{aligned}$$

L'intégration

proposition 1.9 *Soit f dérivable sur un voisinage de 0.*

Si la fonction dérivée f' admet un $(DL_n(0))$, alors f admet un $(DL_{n+1}(0))$ dont la partie régulière de f est l'intégrale de la partie régulière de f'.

Exemple 1.9 *Sachant que le $(DL_4(0))$ de la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x}$ est:*

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o\left(x^4\right)$$

1	$1+x$
$-1-x$	$1-x+x^2-x^3+x^4$
$+x+x^2$	
$-x^2-x^3$	
$+x^3+x^4$	
x^4	

Puisque $\ln(x+1) = \int \frac{1}{1+x}dx$, *alors:xcc*

$$\begin{aligned} \ln(x+1) &= \int \left(1 - x + x^2 - x^3 + x^4\right) dx + o\left(x^5\right), \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right). \end{aligned}$$

De plus le $(DL_2(0))$ de la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ est:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + +o\left(x^2\right)$$

Puisque $\arctan x = \int \frac{1}{1+x^2}dx$, *alors:*

$$\begin{aligned} \arctan x &= \int \left(1 - x^2\right) dx + o\left(x^3\right), \\ &= x - \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right). \end{aligned}$$

Dérivation

proposition 1.10 *Soit f une fonction dérivable au voisinage de 0. Si f admet un $(DL_n(0))$ alors f' admet un $(DL_{n-1}(0))$, dont la partie régulière de f' est exactement la dérivée de la partie régulière de f.*

Exemple 1.10 *Le* $(DL_5(0))$ *de la fonction* $\sin x$ *est:*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o\left(x^5\right),$$

alors

$$\begin{aligned} \cos x &= (\sin x)' = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)' + o\left(x^4\right), \\ &= 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} + o\left(x^4\right), \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^4\right). \end{aligned}$$

1.3 Les développements limités généralisés

1.3.1 Le développement limité généralisé au voisinage de 0

proposition 1.11 *Soit une fonction* f *définie sur* I *sauf au point 0 et n'est pas prolongeable sur* $I \cup \{0\}$*, c'est à dire* f *n'admet pas un DL au voisinage de 0.*

On dit que la fonction f *admet un développement limité généralisé au voisinage de 0 à l'ordre* $(n-p)$ *avec* $p > 0$*, si la fonction* $x^p f(x)$ *admet un* $DL_n(0)$ *autrement dit:*

$$f(x) = \frac{\alpha_p}{x^p} + \frac{\alpha_{p-1}}{x^{p-1}} + ... + \frac{\alpha_1}{x} + \beta_0 + \beta_1 x + ... + \beta_{n-p} x^{n-p} + o\left(x^{n-p}\right).$$

et on note que f *admet un* $DLG_{n-p}(0)$

Remarque 1.4 *On utilise le DLG surtout dans la division suivant la puissance croissante dans le cas où la partie régulière du dividende contient la constante et le diviseur non.*

Exemple 1.11

$1+x+x^2-x^3$	$x-x^3$
$-1+x^2$	$\frac{1}{x}+1+2x+2x^3+...$
$x+2x^2-x^3$	
$-x+x^3$	
$2x^2$	
$-2x^2+2x^4$	
$2x^4$	

1.3.2 Le développement limité généralisé au voisinage de a

proposition 1.12 *C'est le même principe sauf il faut faire le changement de variable* $X = x-a$*, donc si* $x \to a$ *on trouve que* $X \to 0$.

On dit que la fonction f *admet un développement limité généralisé au voisinage de* a *à l'ordre* $(n-p)$ *avec* $p>0$*, si la fonction* $X^p f(X)$ *admet un* $DL_n(0)$ *c'est à dire* $(x-a)^p f(x)$ *admet un* $DL_n(a)$

Exemple 1.12 *Trouver le* $DLG_{n-3}(2)$ *de* $f(x) = \frac{1}{x(x-2)^3}$.

On pose: $X = x-2$*, alors* $f(X) = \frac{1}{(X+2)X^3}$

On a:

$$\frac{1}{X+2} = \frac{1}{2}.\frac{1}{1+\left(\frac{X}{2}\right)} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{X}{2}+\left(\frac{X}{2}\right)^2+...+(-1)^n\left(\frac{X}{2}\right)^n\right)+o(X^n)$$

ce qui implique que:

$$\frac{1}{(X+2)X^3} = \frac{1}{2X^3}-\frac{1}{2^2X^2}+\frac{1}{2^3X}+...+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}X^{n-3}+o\left(X^{n-3}\right)$$

D'où:

$$\frac{1}{x(x-2)^3} = \frac{1}{2(x-2)^3}-\frac{1}{2^2(x-2)^2}+\frac{1}{3^3(x-2)}+...+\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-2)^{n-3}+o\left((x-2)^{n-3}\right)$$

1.3.3 Le développement limité généralisé au voisinage de l'infini

proposition 1.13 *1) Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ qui n'admet pas un $Dl_n(+\infty)$, C'est le même principe sauf il faut faire le changement de variable $X = \frac{1}{x}$, donc si $x \to +\infty$ on trouve que $X \to 0$.On dit que la fonction f admet un développement limité généralisé au voisinage de $+\infty$ à l'ordre $(n-p)$ avec $p > 0$, si la fonction $X^p f(X)$ admet un $DL_n(0)$ c'est à dire $\left(\frac{1}{x}\right)^p f(x)$ admet un $DL_n(+\infty)$*

2) Soit f une fonction définie au voisinage de $-\infty$ qui n'admet pas un $Dl_n(-\infty)$, C'est le même principe sauf il faut faire le changement de variable $X = \frac{1}{x}$, donc si $x \to -\infty$ on trouve que $X \to 0$.On dit que la fonction f admet un développement limité généralisé au voisinage de $-\infty$ à l'ordre $(n-p)$ avec $p > 0$, si la fonction $X^p f(X)$ admet un $DL_n(0)$ c'est à dire $\left(\frac{1}{x}\right)^p f(x)$ admet un $DL_n(-\infty)$

Exemple 1.13 *Le le $DLG_{n-2}(+\infty)$ de $f(x) = \frac{x^3}{1+x}$.*

On pose: $X = \frac{1}{x}$, donc si $x \to +\infty$ on trouve que $X \to 0$.

$$\begin{aligned} f(X) &= \frac{X}{X^3(1+X)} = \frac{1}{X^2(1+X)} \\ &= \frac{1}{X^2}\left(1 - X + \frac{X^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^n}{n}X^n\right) + o(X^n) \\ &= x^2 - x + \frac{1}{2} + \dots + \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{x}\right)^n + o\left(\frac{1}{x^n}\right). \end{aligned}$$

1.4 Applications des développements limités

1.4.1 Fonction équivalente et calcul des limites

proposition 1.14 *1) Si la fonction f admet un $DL_n(0)$ avec $k = \min\{0 \le i \le n/a_i \neq 0\}$ alors la fonction f est équivalente à $a_k x^k$ au voisinage de 0 et on écrit:*

$$f \sim a_k x^k.$$

2) Si la fonction f admet un $DLG_{n-p}(0)$ avec $k = \min\{0 \le i \le n/a_i \neq 0\}$ alors la fonction

f est équivalente à $a_k x^{k-p}$ au voisinage de 0 et on écrit:

$$f \sim a_k x^{k-p} = \frac{a_k}{x^{p-k}} \ \text{car } p > k.$$

Exemple 1.14 *on peut ajouter quelques termes à $a_k x^k$ par exemple:*

$$1) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + ...,$$

alors:

$$\sin x \sim x \ , \ \sin x \sim x - \frac{x^3}{3!} \ \text{et} \ \sin x \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}, ...$$

$$2) e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

alors:

$$e^x \sim 1 + x, au\ V(0).$$

1.4.2 Calcul d'une valeur approchée

proposition 1.15 *Si une fonction f admet un $DL_n(0)$, alors on peut donner des valeurs approchée à une valeur $f(a)$ suivant la partie régulière du Dl, et autant que l'ordre et assez élevé autant que la valeur est bien précise.*

Exemple 1.15

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

alors pour $x = 1$ on a:

$$e \simeq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 2 + \frac{4}{6} = 2 + \frac{2}{3} = 2,67 \ \text{(l'ordre utilisé est 3)}$$

1.4.3 L'équation de la tangente et position par rapport au graphe

proposition 1.16 *Si une fonction f admet un $DL_n(a)$ avec $n \geq 2$, alors le graphe de la fonction f admet au point a une tangente d'équation:*

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 (x - a),$$

et le signe de $\alpha_k (x-a)^k$ où k est le premier indice après 1 tel que $\alpha_k \neq 0$ donne la position du graphe par rapport à la tangente.

Exemple 1.16

$$1) f(x) = 1 + 2x - x^2 + o\left(x^2\right).$$

L'équation de la tangente est:

$$y = 1 + 2x,$$

et elle est au-dessus du graphe car:

$$f(x) - 1 + 2x = -x^2 < 0.$$

$$2) g(x) = -1 + 3x + x^3 + o\left(x^3\right).$$

L'équation de la tangente est:

$$y = -1 + 3x,$$

et on a les deux cas suivants:

$$g(x) - (-1 + 3x) = x^3 \begin{cases} > 0 \text{ à droite de 0, alors la tangente est au-dessous du graphe,} \\ < 0 \text{ à gauche de 0, alors la tangente est au-dessus du graphe.} \end{cases}$$

1.4.4 L'équation d'une asymptôte et position par rapport au graphe

proposition 1.17 *Si une fonction admet un $DL_{n-1}(\pm\infty)$ c'est à dire:*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 \frac{1}{x} + a_3 \frac{1}{x^2} + ... + a_{n-1} \frac{1}{x^{n-1}} + o\left(\frac{1}{x^{n-1}}\right).$$

1er cas: si $a_1 = 0$:

Le graphe admet une asymptôte horisontale d'équation:

$$y = a_0.$$

2ème cas: si $a_1 \neq 0$:

Le graphe admet une asymptôte oblique d'équation:

$$y = a_0 + a_1 x.$$

Dans les deux cas la position par rapport au graphe est donnée par $\alpha_k \left(\frac{1}{x}\right)^k$ *où* k *est le premier indice après 1 tel que* $\alpha_k \neq 0$.

Exemple 1.17

$$1) f(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^3 + ... + (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)^n + o\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

Le graphe admet une asymptôte horisontale d'équation:

$$y = 0,$$

et

$$\begin{cases} \frac{1}{x} > 0 \text{ si } x > 0 \text{ alors } (C_f) \text{ est au dessus de l'asymptôte,} \\ \frac{1}{x} < 0 \text{ si } x < 0 \text{ alors } (C_f) \text{ est au dessous de l'asymptôte.} \end{cases}$$

Remarque 1.5 *Le cours suivant est surtout pour voir la notion de la décomposition en éléments simples car elle est utile dans les intégrales.*

Chapitre 2

Polynômes et Fractions rationnelles

2.1 Polynômes

2.1.1 Propriétés et définitions

Définition 2.1 *Un polynôme est une fonction de la forme:*

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, a_k \in \mathbb{R}, 0 \leq k \leq nn \in \mathbb{N}.$$

x est la variable, les $a_k, 0 \leq k \leq n$ s'appellent les coefficients de P. On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble de tous les polynômes à coefficients réels et $\mathbb{C}[X]$ si $a_k \in \mathbb{C}$.

Définition 2.2 *(degré et valuation d'un polynôme)*

Soit $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$, avec $P(x) \neq 0$.

(1) Le degré de P noté $\deg P = d^0 P = \max k$ tq $a_k \neq 0, 0 \leq k \leq n$.

(2) Si $P(x) = 0$ (le polynôme nul) alors par convention $\deg P = -\infty$.

Preuve: *On a la propriété $\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q$ dans tous les cas en particulier si $P = 0$ et Q est quelconque, alors cette égalité n'est vraie que si $\deg P = \infty$. De plus $\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$ qui est vraie si $Q = -P$ ce qui affirme que $\deg P = -\infty$.*

(3) La valuation de P notée val $(P) = v(P) = \min k$ tq $a_k \neq 0, 0 \leq k \leq n$.

(4) La valuation du polynôme nul est égale à $+\infty$.

Notions et propriétés

(1) $P(x) = a_0$ avec $a_0 \neq 0$ s'appelle le polynôme constant.

(2) $P(x) = a_k x^k$ avec $a_k \neq 0$ s'appelle un monôme.

(3) Soit $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$, avec $a_n \neq 0$, alors $a_n x^n$ est le terme ou monôme dominant de P et a_n est le coefficient dominant de P.

(4) Un polynôme unitaire est un polynôme dont le coefficient dominant est 1.

(5) Si

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \text{ et } Q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k,$$

alors $P(x) = Q(x)$ ssi $a_k = b_k, \forall k, 0 \leq k \leq n$.

2.1.2 Opération sur $\mathbb{R}[X]$

Soient

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \text{ et } Q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k,$$

On a les propriétés suivantes:

(1)

$$P(x) + Q(x) = \sum_{k=0}^{p} c_k x^k,$$

avec $c_k = a_k + b_k$ et $p = \max(n, m)$. De plus si $n > m$, alors $b_k = 0$ pout tout $k, m+1 \leq k \leq n$ et si $m > n$, alors $a_k = 0$ pout tout $k, n+1 \leq k \leq m$.

(2) $\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$.

(3) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$$\alpha P(x) = \sum_{k=0}^{n} (\alpha a_k) x^k.$$

(4)

$$P(x) \times Q(x) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k, \text{ avec } c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}.$$

(5) $\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q$.

2.1.3 Types de division entre les polynômes

Soient P et Q deux polynômes définis par:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \text{ et } Q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k, a_n \neq 0 \text{ et } b_m \neq 0.$$

La division euclidienne (division suivant les puissances décroissantes)

Pour faire la division euclidienne de P sur Q il faut ordonner les monômes du degré le plus grand vers le degré le plus petit, où on a les deux cas suivants:

1er cas: Si $n < m$, alors:

$$\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline P & 0 \end{array}$$

c'est à dire: $P(x) = 0 \times Q(x) + P(x)$.

2ème cas: Si $n \geq m$, alors:

$$\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline R & H \end{array}$$

c'est à dire: $P(x) = h(x) \times Q(x) + R(x)$ avec $\deg R < \deg Q$.

P s'appelle le dividende, Q le diviseur et R est le reste de la division euclidienne.

Exemple 2.1 *Faire la division euclidienne de* $P(x) = -3 + 2x + 4x^2 - 5x^3 + 3x^4$ *sur* $Q(x) = 5 + x - x^2$.

$$\begin{array}{l|l}
3x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 2x + 3 & -x^2 + x + 5 \\ \hline
-(3x^4 - 3x^3 - 15x^2) & -3x^2 - 8x - 27 \\
= 0 + 8x^3 + 19x^2 + 2x + 3 & \\
-\left(8x^3 - 8x^2 - 40x\right) & \\
= 0 + 27x^2 + 42x + 3 & \\
-\left(27x^2 - 27x - 135\right) & \\
0 + 69x + 138 &
\end{array}$$

Alors le reste de cette division euclidienne est: $R(x) = 69x + 138$.

Division suivant les puissances croissantes

La division suivant les puissances croissantes a le même principe que la division euclidienne, mais l'ordre des monôme est de la puissance la plus petite vers la plus grande. Dans la division euclidienne on arrêt si le degré du reste inférieur strictement au degré du diviseur, comme on remarque les degrés du résultat (le quotient h) diminués, par contre dans la division suivant les puissances croissantes les degrés du résultat augmente pour cela on a la phrase la division suivant les puissances croissantes à l'ordre k c'est à dire il faut trouver un polynôme de degré k.

Exemple 2.2 *Faire la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 2 de* $P(x) = -3 + 2x + 4x^2 - 5x^3 + 3x^4$ *sur* $Q(x) = 5 + x - x^2$.

$$\begin{array}{l|l} -3 + 2x + 4x^2 - 5x^3 + 3x^4 & 5 + x - x^2 \\ \hline -\left(-3 - \frac{3}{5}x + \frac{3}{5}x^2\right) & -\frac{3}{5} + \frac{13}{25}x + \frac{72}{125}x^2 \\ = 0 + \frac{13}{5}x + \frac{17}{5}x^2 - 5x^3 + 3x^4 & \\ -\left(\frac{13}{5}x + \frac{13}{25}x^2 - \frac{13}{25}x^3\right) & \\ = 0 + \frac{72}{25}x^2 - \frac{112}{25}x^3 + 3x^4 & \end{array}$$

Alors le résultat de cette division suivant les puissances croissantes à l'ordre 2 est:

$h(x) = -\frac{3}{5} + \frac{13}{25}x + \frac{72}{125}x^2$.

Remarque 2.1 *les deux résultats des deux divisions sont complètements différentes malgré que le dividende et le diviseur sont les mêmes.*

2.1.4 La racine et leur ordre de multiplicité

Définition 2.3 *Soit P un polynôme défini par*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \ \ tq\ a_n \neq 0.$$

On dit que x_0 est une racine ou zéro de $P(x)$ ssi: $P(x_0) = 0$.

Définition 2.4 *Si* $P(x) = (x - x_0)^m Q(x)$ *avec* $Q(x_0) \neq 0$*, alors* m *est dite l'ordre de multiplicité de la racine* x_0 *de* $P(x)$*. De plus on a:*

$$P(x_0) = 0 \text{ et } \forall k, 1 \leq k < m, P^{(k)}(x_0) = 0 \text{ et } P^{(m)}(x_0) \neq 0.$$

Si $P(x) = (x - x_0) Q(x)$ *avec* $Q(x_0) \neq 0$*, alors* x_0 *est dite une racine simple de* $P(x)$.

Exemple 2.3 *Trouver l'ordre de multiplicité de la racine 1 du polynôme:*

$$P(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3.$$

$P(1) = 0, P'(x) = 3x^2 + 2x - 5 \Rightarrow P'(1) = 0$ *et* $P''(x) = 6x + 2$ *donc* $P''(1) \neq 0$.

Alors l'ordre de multiplicité est: 2 ç-à-d: $P(x) = (x-1)^2 Q(x)$ *avec* $Q(1) \neq 0$ *(1 est une racine double de* $P(x)$*).*

2.1.5 Quelques propriétés sur les racines d'un polynôme

Théorème 2.1 *(*Gauss*) Soit* $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ *un polynôme tq* $a_0, a_n \neq 0$.

(1) Si $\alpha \in \mathbb{Z}$ *est une racine de* P *alors* α *divise* a_0.

(2) Si $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$ *est une racine de* P *alors* α *divise* a_0 *et* β *divise* a_n.

2.2 Les fractions rationnelles

Définition 2.5 *Une fraction rationnelle est une fonction* $H(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$*, où* $f(x)$ *et* $g(x)$ *sont des polynômes avec* $g(x) \neq 0$*. Si le degré de* $f(x)$ *est inférieur strictement au degré de* $g(x)$*, on dit que* $H(x)$ *est une fraction rationnelle propre, si non, on dit que* $H(x)$ *est impropre. Dans ce cas on peut exprimer* $H(x)$ *comme la somme d'un polynôme et d'une fraction rationnelle propre par la méthode de la division euclidienne c'est à dire:*

$$H(x) = L(x) + \frac{R(x)}{g(x)} \text{ où } \deg R(x) < \deg g(x).$$

Ce qui permet de dire qu'une fration rationnelle impropre est la somme d'un polynôme et une fraction rationnelle propre.

2.2.1 La décomposition en éléments simples

Théoriquement tout polynôme à coefficients réels peut s'exprimer comme produit des facteurs linéaires réels de la forme $ax+b$ et d'autres quadratiques irréductibles de la forme $\alpha x^2+\beta x+\lambda$.

Un polynôme quadratique $\left(\alpha x^2+\beta x+\lambda\right)$ est réductible ssi $\triangle = b^2 - ac \geq 0$ et il est irréductible ssi $\triangle < 0$ (Dans ce cas les racines ne sont pas réelles).

La décomposition en élément simple est l'opération inverse d'assembler des fractions à une fraction par la méthode d'unification des dénoménateurs.

Étapes de la décomposition en éléments simples pour une fraction propre

N'oubliant jamais que pour commencer une décomposition en éléments simples il faut que la fraction soit une fraction rationnelle propre si non on fait la division euclidienne et on prend le reste sur le dénominateur. Si $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$ où $\deg h(x) < \deg g(x)$ alors dans l'opération de la décomposition en éléments simples on suit les étapes suivantes:

1ère étape: La décomposition du dénominateur Chaque polynôme est décomposable comme produit des facteurs qui sont parmis les quatres types suivants:

Facteurs linéaires distincts

Un facteur linéaire distinct est de la forme: $ax+b$ (la racine de ce polynôme est simple pour le dénominateur).

Facteurs linéaires répétés

Un facteur linéaire répété est de la forme: $(ax+b)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$ (la racine de ce polynôme est d'ordre n pour le dénominateur).

Facteurs quadratiques distincts

C'est un facteur de la forme ax^2+bx+c en plus il est irréductible ($\triangle < 0$).

Facteurs quadratiques répétés

C'est un facteur de la forme $\left(ax^2+bx+c\right)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$ de plus ax^2+bx+c est irréductible.

2ème étape: La décomposition en éléments simples C'est l'écriture d'une fraction rationnelle propre comme somme d'éléments simples qui sont en général de la forme:

$$\frac{A_1}{a_1x+b_1}, \frac{B_1}{(c_1x+d_1)^n}, \frac{\alpha_1 x+\beta_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}, \text{ et } \frac{\alpha_2 x+\beta_2}{(a_3x^2+b_3x+c_3)^m}.$$

d'une façon que les dénominateurs des éléments simples sont tous les cas possibles pour que sont dénominateur commun est $g(x)$.

Par exemple si on a dans $g(x)$ le facteur $(ax+b)^5$ alors dans la décomposition en éléments simples les cas des fractions telles que sont dénominateur commun est $(ax+b)^5$ sont

$$\frac{A_1}{(ax+b)} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \frac{A_4}{(ax+b)^4} + \frac{A_5}{(ax+b)^5}.$$

C'est à dire toujours il faut commencer les puissances de 1 jusqu'au n (la multiplicité du facteur).

Par contre pour les numérateurs il y'a deux règles:

(1) Si le dénominateur est un facteur linéaire répété ou non répété alors dans le numérateur il faut poser des constantes inconues.

(2) Si le dénominateur est un facteur quadratique répété ou non répété alors dans le numérateur il faut poser des polynômes de degrés 1 inconus.

Exemple:

$$\frac{x}{(x+1)(x-1)^2(x^2+x+1)(x^2+x+3)^2} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{(x-1)^2} + \frac{ax+b}{x^2+x+1} + \frac{cx+d}{x^2+x+3} + \frac{ex+f}{(x^2+x+3)^2}.$$

Remarque: Le nombre d'éléments simples est la somme des puissances des facteurs du dénominateur.

3ème étape: Le calcul des coefficients des numérateurs des éléments simples Il existe des méthodes pour calculer les coefficients des numérateurs pour les éléments simples citons par exemple:

(1) regrouper les éléments simples et par identification des deux numérateurs des deux membres on trouve les constantes, mais cette méthode n'est plus ifficace surtout si le nombre des constantes inconues est assez grand.

(2) **Méthode des limites:**

Le principe de cette méthode est basé sur le principe suivant:

$$\text{si } f(x) = g(x) \text{ alors } \forall x_0, \lim_{x\to x_0} f\ (x) = \lim_{x\to x_0} g(x) \text{ et } \forall h(x), h(x) f(x) = h(x) g(x).$$

Pour mieux comprendre cette méthode on donne un exemple d'application:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{5x^2+1}{(x+2)(x-3)^4(x^2+x+2)(x^2+x+5)^2} \\ &= \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{x-3} + \frac{A_3}{(x-3)^2} + \frac{A_4}{(x-3)^3} + \frac{A_5}{(x-3)^4} + \frac{ax+b}{x^2+x+2} + \frac{cx+d}{x^2+x+5} + \frac{ex+f}{(x^2+x+5)^2}. \end{aligned}$$

(a) Pour le facteur linéaire non répété c'est à dire: $x+2$.

Multipliant les deux memebres par $x+2$ on trouve:

$\frac{5x^2+1}{(x-3)^4(x^2+x+2)(x^2+x+5)^2} = A_1 + (x+2)\left[\frac{A_2}{x-3} + \frac{A_3}{(x-3)^2} + \frac{A_4}{(x-3)^3} + \frac{A_5}{(x-3)^4} + \frac{ax+b}{x^2+x+2} + \frac{cx+d}{x^2+x+5} + \frac{ex+f}{(x^2+x+5)^2}\right].$

Faisant tendre la limite des deux membres vers -2 (le nombre qui élimine $x+2$) on trouve:

$$A_1 = \lim_{x\to -2} \frac{5x^2+1}{(x-3)^4(x^2+x+2)(x^2+x+5)^2} = \frac{21}{122500} = \frac{3}{17500}.$$

Cette démarche permet toujours d'éliminer les autres coefficients.

(b) Pour le facteur linéaire répété c'est à dire: $x-3$.

(i) pour la puissance la plus grande c'est à dire le coefficient A_5 par multiplication des deux membres par $(x-3)^4$ on trouve

$\frac{5x^2+1}{(x+2)(x^2+x+2)(x^2+x+5)^2} = A_5 + (x-3)^4\left[\frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{x-3} + \frac{A_3}{(x-3)^2} + \frac{A_4}{(x-3)^3} + \frac{ax+b}{x^2+x+2} + \frac{cx+d}{x^2+x+5} + \frac{ex+f}{(x^2+x+5)^2}\right].$

Faisant tendre la limite des deux membres vers 3 (le nombre qui élimine $x-3$) on trouve

$$A_5 = \lim_{x\to 3} \frac{5x^2+1}{(x+2)(x^2+x+2)(x^2+x+5)^2} = \frac{46}{20230} = \frac{23}{10115}.$$

(ii) Passant pour A_4.

Si on applique les même démarches que pour A_5 on trouve un problème dans le terme qui contient A_5, mais multipliant les deux membres par $(x-3)^4$ et dérivant les deux membres et faisant tendre x vers 3 alors on trouve:

$$A_4 = \lim_{x\to 3} \left(\frac{5x^2+1}{(x+2)(x^2+x+2)(x^2+x+5)^2}\right)'.$$

(iii) De la même manière.

Dérivant les deux membres deux fois et faisant tendre x vers 3 alors on a:

$$2A_3 = \lim_{x\to 3}\left(\frac{5x^2+1}{(x+2)(x^2+x+2)(x^2+x+5)^2}\right)^{(2)}.$$

(iv) et de même si on dérive trois fois on trouve

$$3.2A_2 = \lim_{x\to 3}\left(\frac{5x^2+1}{(x+2)(x^2+x+2)(x^2+x+5)^2}\right)^{(3)}.$$

Malgré qu'il y' a beucoup de calculs dans les dérivées mais le but est de donner l'idée et ces mieux que l'identification.

(c) Pour le facteur quadratique non répété c'est à dire: x^2+x+2 qui admet deux racines complexes:

$$x_1 = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}.$$

Multipliant les deux memebres par x^2+x+2 on trouve:

$$\frac{5x^2+1}{(x+2)(x-3)^4(x^2+x+5)^2} = ax+b+\left(x^2+x+2\right)\left[\frac{A_1}{x+2}+\frac{A_2}{x-3}+\frac{A_3}{(x-3)^2}+\frac{A_4}{(x-3)^3}+\frac{A_5}{(x-3)^4}+\frac{cx+d}{x^2+x+5}+\frac{ex+f}{(x^2+x+5)^2}\right].$$

Faisant tendre la limite des deux membres vers x_1 ou x_2 on trouve

$$ax_1+b = \lim_{x\to x_1}\frac{5x^2+1}{(x+2)(x-3)^4(x^2+x+5)^2}.$$

On trouve après calcul un nombre complexe egale à un nombre complexe d'où la partie réelle égale la partie réelle et l'imaginaire égale la partie imaginaire ce qui donnes deux équations à deux inconus a et b.

(d) Pour le facteur quadratique répété c'est à dire: $\left(x^2+x+5\right)$ qui admet des racines complexes:

$$x_3 = \frac{-1+i\sqrt{19}}{2} \text{ et } x_4 = \frac{-1-i\sqrt{19}}{2}.$$

On passe à la puissance la plus grande Multipliant les deux memebres par $\left(x^2+x+5\right)^2$ on trouve:

$$\frac{5x^2+1}{(x+2)(x-3)^4(x^2+x+2)} = ex+f+\left(x^2+x+5\right)^2\left[\frac{A_1}{x+2}+\frac{A_2}{x-3}+\frac{A_3}{(x-3)^2}+\frac{A_4}{(x-3)^3}+\frac{A_5}{(x-3)^4}+\frac{ax+b}{x^2+x+2}+\frac{cx+d}{x^2+x+5}\right].$$

Faisant tendre la limite des deux membres vers x_3 ou x_4 on trouve:

$$ex_3 + f = \lim_{x \to x_3} \frac{5x^2 + 1}{(x+2)(x-3)^4 (x^2 + x + 2)}$$

On trouve après calcul un nombre complexe egale à un nombre complexe d'où la partie réelle égale la partie réelle et l'imaginaire égale la partie imaginaire ce qui donne deux équations à deux inconus e et f.

Il nous reste que c et d pour cela multipliant les deux membre par x et faisant tendre x ver $+\infty$ alors on trouve:

$$0 = A_1 + A_2 + a + c \Rightarrow c = -A_1 - A_2 - a.$$

et pour d il suffit de choisir une valeur et la remplacer dans les deux membres par exemple 0 on trouve:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8100} &= \frac{A_1}{2} + \frac{A_2}{3} + \frac{A_3}{9} - \frac{A_4}{27} + \frac{A_5}{81} + \frac{b}{2} + \frac{d}{5} + \frac{f}{25} \\ &\Rightarrow d = -5\left(\frac{A_1}{2} + \frac{A_2}{3} + \frac{A_3}{9} - \frac{A_4}{27} + \frac{A_5}{81} + \frac{b}{2} + \frac{f}{25}\right). \end{aligned}$$

N'oubliant pas que c'est un exemple assez long qui englobe tous les cas.

(3) **Méthode qui utilise la division suivant les puissances croissantes:**

Remarque: La division suivant les puissances croissantes a le même principe que la division euclidienne mais l'ordre des monôme est de la puissance la plus petite vers la plus grande. Prenons alors le même exemple:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{5x^2+1}{(x+2)(x-3)^4 (x^2+x+2)(x^2+x+5)^2} \\ &= \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{x-3} + \frac{A_3}{(x-3)^2} + \frac{A_4}{(x-3)^3} + \frac{A_5}{(x-3)^4} + \frac{ax+b}{x^2+x+2} + \frac{cx+d}{x^2+x+5} + \frac{ex+f}{(x^2+x+5)^2}. \end{aligned}$$

Cette méthode est utile surtout pour calculer les coefficients des facteurs linéaires répétés et pas d'autre dans notre cas c'est: $x - 3$.

On pose: $t = x - 3 \Rightarrow x = t + 3$ remplaçant alors dans $\frac{h(x)}{g(x)}$ on trouve:

$$\begin{aligned}\frac{h(t)}{g(t)} &= \frac{5(t+3)^2+1}{t^4\left((t+3)+2\right)\left(((t+3))^2+(t+3)+2\right)\left((t+3)^2+(t+3)+5\right)^2} \\ &= \frac{46+30t+5t^2}{t^4\left(20230+30821t+23145t^2+8732t^3+2035t^4+300t^5+30t^6+t^7\right)}.\end{aligned}$$

Faisant la division suivant les puissances croissantes sans t^4 à l'ordre $(4-1=3)$ toujours l'ordre est $p-1$ avec p est l'ordre de multiplicité de la racine en effet

$46+30t+5t^2$	$20230+30821t+23145t^2+8732t^3+2035t^4+300t^5+30t^6+t^7$
$-\left(46+\frac{1417766}{20230}t....\right)$	$\frac{46}{20230}$

il y 'a des calculs car l'exemple est plus général mais le but est de donner l'idée.

On trouve le résultat $\frac{46}{20230}+k_1t+k_2t^2+k_3t^3$, après on divise sur t^4 ce qui donne:

$$k_3=A_2, k_2=A_3, k_1=A_4 \text{ et } \frac{46}{20230}=A_{5.}$$

Les deux méthode sont bonnes si l'exemple est simple surtout dans les examens.

Exemple 2.4 $f(x)=\frac{x+1}{(x-2)(x+4)^3(x^2+x+1)}=\frac{A_1}{x-2}+\frac{A_2}{x+4}+\frac{A_3}{(x+4)^2}+\frac{A_4}{(x+4)^3}+\frac{\alpha x+\beta}{x^2+x+1}.$

$$A_1=\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{(x+4)^3(x^2+x+1)}=\frac{3}{1080}.$$

On pose $t=x+4\Rightarrow x=t-4\Rightarrow f(t)=\frac{-3+t}{t^3(t-6)(t^2-7t+13)}=\frac{-3+t}{t^3(t^3-13t^2+55t-78)}.$

La division suivant les puissances croissantes de $(-3+t)$ *sur* $\left(-78+55t-13t^2+t^3\right)$ *à l'ordre 2 donne:*

$$\frac{1}{26}+\frac{29}{2028}t+\frac{581}{158184}t^2.$$

Par division sur t^3 *on trouve* $A_4=\frac{1}{26}, A_3=\frac{29}{2028}$ *et* $A_2=\frac{581}{158184}.$

Pour le calcul de α *et* β *sachant que* $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ *est une racine de* x^2+x+1,

$$\lim_{x\to\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}(\alpha x+\beta)=\lim_{x\to\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}\frac{x+1}{(x-2)(x+4)^3}.$$

Par identification des deux parties réelles et imaginaires des deux membres on trouve: $\alpha = -\frac{9}{73}$ *et* $\beta = -\frac{8}{73}$.

Remarque 2.2 *On peut utiliser la parité de la fonction dans la recherche des coefficients (Voir Exercice 11 exemple (4)).*

Remarque 2.3 *La décomposition en éléments simples est très utile dans le cours des intégrales.*

2.3 Exercices

Exercice 01: Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$ l'équation suivante

$$(1)\ P\left(X^2\right) = \left(X^2+1\right) P(X), (2)\ \left(P'\right)^2 = 4P \text{ et } (3)\ P \circ P = P.$$

Exercice 02: Trouver le reste de la division du polynôme P par Q dans les deux cas suivants

$$\begin{aligned}(1)\ P(X) &= X^n + (X-1)^n + 1 \text{ et } Q(X) = X^2 - X.\\ (2)\ P(X) &= (\cos\theta + X\sin\theta)^n \text{ avec } n \in \mathbb{N}, \theta \in \mathbb{R} \text{ et } Q(X) = X^2+1.\end{aligned}$$

Exercice 03: Déterminer les polynômes P de degré supérieur ou égal à 1 et tels que P' divise P.

Exercice 04: Soient $n, m \geq 1$. Déterminer le pgcd de $x^n - 1$ et $x^m - 1$.

Exercice 05: (1) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant des entiers naturels, on considère les deux polynômes

$$P = x^{4\alpha+3} + x^{4\beta+2} + x^{4\gamma+1} + x^{4\delta} \text{ et } Q = x^3 + x^2 + x + 1.$$

Montrer que P est divisible par Q.

(2) La même question si: $P = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$ et $Q = (x-1)^2$.

Exercice 06: Déterminer les entiers n tels que $(x+1)^n - x^n - 1$ soit divisible par x^2+x+1.

Exercice 07: Pour $n \in \mathbb{N}^*$ quel est l'ordre de multiplicité de 2 comme racine du polynôme

$$P(x) = nx^{n+2} - (4n+1)x^{n+1} + 4(n+1)x^n - 4x^{n-1}.$$

Exercice 08: Montrer que le polynôme:

$P(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$, n'admet pas des racines multiples.

Exercice 09: Déterminer $P \wedge Q$ et $P \vee Q$ dans les cas suivants:

$$\begin{aligned}(1) P(x) &= -2x^4 + 2x^3 + 2x - 2 \text{ et } Q(x) = 3x^3 + 9x^2 + 9x + 6. \\ (2) P(x) &= x^3 + x^2 - 5x + 3 \text{ et } Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1. \\ (3) P(x) &= x^n - 1 \text{ et } Q(x) = (x-1)^n, n \geq 1.\end{aligned}$$

Exercice 10: Soient $P(x) = x^4 + 1$ et $Q(x) = x^3 + 1$.

(1) Déterminer $U, V \in \mathbb{R}[X]$ tels que: $UP + VQ = 1$.

(2) En déduire $U \wedge V$.

Exercice 11: Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes

$$(1)\ \frac{1}{x^4 - x}; (2)\ \frac{1}{x(x^2+x+1)^2}; (3)\ \frac{x^6}{(x^2+1)^2(x+1)^2} \text{ et } (4)\ \frac{1}{x^{10}+x^6}.$$

2.4 Solutions des exercices

Exercice 01: Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$ l'équation suivante

$$(1)\ P(X^2) = (X^2 + 1) P(X).$$

Si $d^\circ P(X) = m$, alors $d^\circ P(X^2) = 2m$ d'où $d^\circ\left[(X^2+1) P(X)\right] = m + 2$, ce qui donne:

$$2m = m + 2 \Rightarrow m = 2.$$

Alors $P(X) = a_2 X^2 + a_1 X + a_0$, par suite l'équation (1) donne:

$$a_1 X^3 + (a_0 - a_1 + a_2) X^2 + a_1 X = 0,$$

$\Rightarrow a_1 = 0$ et $a_0 - a_1 + a_2 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$ et $a_0 = -a_2$,

$\Rightarrow P(X) = a_2X^2 - a_2$ avec $a_2 \in \mathbb{R}$.

$$(2)\ \left(P'\right)^2 = 4P.$$

Si $d^\circ P(X) = m$, alors $d^\circ P'(X) = m-1$ d'où $d^\circ \left[\left(P'\right)^2\right] = 2m-2$ ce qui donne que

$$2m - 2 = m \Rightarrow m = 2.$$

Alors $P(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0$, par suite l'équation (2) donne:

$$(2a_2X + a_1)^2 = 4\left(a_2X^2 + a_1X + a_0\right),$$

$$\Rightarrow \left[4(a_2)^2 - 4a_2\right]X^2 + [4a_2a_1 - 4a_1]X + (a_1)^2 - 4a_0 = 0.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a_2)^2 - a_2 = 0 \\ a_2a_1 - a_1 = 0 \\ (a_1)^2 - 4a_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 0, a_1 = 0 \text{ et } a_0 = 0, \\ \text{ou} \\ a_2 = 1 \text{ et } a_0 = \frac{1}{4}(a_1)^2, a_1 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left\{ P(X) = 0 \text{ ou } P(X) = X^2 + a_1X + \frac{1}{4}(a_1)^2, \text{ avec } a_1 \in \mathbb{R}. \right.$$

$$(3)\ P \circ P = P.$$

Si $d^\circ P(X) = m$, alors $d^\circ P \circ P(X) = m^2$ ce qui implique que

$$m = m^2 \Rightarrow m = 0 \text{ ou } m = 1.$$

1er cas: $P(X) = a_0$, par suite l'équation (3) donne:

$$a_0 = a_0 \Rightarrow P(X) = a_0, a_0 \in \mathbb{R}.$$

2ème cas: $P(X) = a_1X + a_0$, l'équation (3) donne:

$$a_1(a_1X + a_0) + a_0 = a_1X + a_0,$$

$\Rightarrow (a_1)^2 - a_1 = 0$ et $a_1a_0 = 0$,

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \text{ et } a_0 = 0, \\ \qquad \text{ou} \\ a_1 = 1 \text{ et } a_0 = 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow P(X) = 0$ ou $P(X) = X.$

Conclusion: Les solutions de l'équation sont: $P(X) = a_0, a_0 \in \mathbb{R}$ ou $P(X) = X.$

Exercice 02: Trouver le reste de la division du polynôme P par Q dans les deux cas suivants:

$$(1) P(X) = X^n + (X-1)^n + 1 \text{ et } Q(X) = X^2 - X.$$

Puisque le quotient $Q(X)$ est un polynôme de degré 2 alors le reste est de la forme $R(X) = aX + b$ avec $P(X) = H(X)Q(X) + R(X)$. Mais les racines de $Q(X)$ sont 0 et 1 donc:

$$\begin{cases} P(1) = 2 = R(1) = a + b, \\ P(0) = 1 + (-1)^n = R(0) = b. \end{cases}$$

Ce qui implique que $b = 1 + (-1)^n$ et $a = 2 - b = 2 - [1 + (-1)^n] = 1 - (-1)^n$.

Conclusion: Le reste est le polynôme $R(X) = aX + b = [1 - (-1)^n] X + 1 + (-1)^n$.

$$(2) P(X) = (\cos\theta + X\sin\theta)^n \text{ avec } n \in \mathbb{N}, \theta \in \mathbb{R} \text{ et } Q(X) = X^2 + 1.$$

Puisque le quotient $Q(X)$ est un polynôme de degré 2 alors le reste est de la forme

$R(X) = aX + b$ avec $P(X) = H(X)Q(X) + R(X)$. Mais les racines de $Q(X)$ sont i et $(-i)$ donc:

$$\begin{cases} P(i) = H(i)Q(i) + R(i) \Rightarrow P(i) = R(i), \\ P(-i) = H(-i)Q(-i) + R(-i) \Rightarrow P(-i) = R(-i). \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\cos\theta + i\sin\theta)^n = ai + b \Rightarrow (\cos n\theta + i\sin n\theta) = ai + b, \\ (\cos\theta - i\sin\theta)^n = a(-i) + b \Rightarrow (\cos n\theta - i\sin n\theta) = -ai + b. \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad a = \sin n\theta$ et $b = \cos n\theta.$

Conclusion: Le reste est le polynôme $R(X) = aX + b = (\sin n\theta) X + \cos n\theta$.

Exercice 03: Déterminons les polynômes P de degré supérieur ou égal à 1 et tels que P' divise P.

Puisque P' divise P, $P = QP'$ avec $Q(X) = \alpha(x - \lambda)$.

On applique ensuite la formule de Taylor à P en λ :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\lambda)}{k!} (x - \lambda)^k .$$

D'où:

$$P'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{kP^{(k)}(\lambda)}{k!} (x - \lambda)^{k-1} ,$$

ce qui implique que

$$\alpha(x - \lambda) P'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha k P^{(k)}(\lambda)}{k!} (x - \lambda)^k .$$

Par identification, on obtient, pour tout k telle que $0 \leq k \leq n$:

$$\frac{P^{(k)}(\lambda)}{k!} (\alpha k - 1) = 0.$$

Mais $P^{(n)}(\lambda) \neq 0$ alors $(\alpha n - 1) = 0$ c'est à dire $\alpha = \frac{1}{n}$ ce qui donne que:

$$P^{(k)}(\lambda) = 0 \text{ pour } 0 \leq k \leq n - 1.$$

Par suite on a:

$$P(x) = \frac{P^{(n)}(\lambda)}{n!} (x - \lambda)^n .$$

Ce qui affirme que:

$$P(x) = K(x - \lambda)^n , K \in \mathbb{R}.$$

Exercice 04: Soient $n, m \geq 1$. Déterminer le pgcd de $x^n - 1$ et $x^m - 1$.

Sachant que d'après l'algorithme d'EUCLIDE si $a = bc + d$ alors pgcd $(a, b) =$ pgcd (b, d).

Si $n > m$, alors $n = mp + r$ ce qui implique que:

$$x^n - 1 = x^{mp+r} - 1 = x^r (x^{mp} - 1) + x^r - 1.$$

Mais:

$$x^{mp}-1=(x^m-1)\left(x^{m(p-1)}+x^{m[(p-1)-1]}+x^{m[(p-1)-2]}+...+x^m+1\right).$$

D'où:

$$x^n-1=Q(x)(x^m-1)+x^r-1,$$

c'est à dire: $\text{pgcd}(x^n-1,x^m-1)=\text{pgcd}(x^m-1,x^r-1)$.

Mais puisque $n=mp+r$ alors $\text{pgcd}(n,m)=\text{pgcd}(m,r)$, ce qui implique que:

$$\text{pgcd}(x^n-1,x^m-1)=x^{\text{pgcd}(n,m)}-1 \text{ car tous les diviseur commun sont de la forme } x^k-1.$$

Exercice 05: $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ étant des entiers naturels, on considère les deux polynômes:

$$(1)P=x^{4\alpha+3}+x^{4\beta+2}+x^{4\gamma+1}+x^{4\delta} \text{ et } Q=x^3+x^2+x+1.$$

Montrons que P est divisible par Q.

$P-Q=x^3\left(x^{4\alpha}-1\right)+x^2\left(x^{4\beta}-1\right)+x\left(x^{4\gamma+3}\right)+\left(x^{4\delta}-1\right)$.

Mais x^4-1 divise tous polynôme de la forme $x^{4n}-1$ ce qui implique que x^4-1 divise $P-Q$, et par suite $x^4-1=(x-1)Q$,

$\Rightarrow Q$ divise x^4-1 qui lui même divise $P-Q \Rightarrow Q$ divise P avec: $Q=(x+1)(x-i)(x+i)$.

Conclusion: $P(-1)=P(i)=P(-i)=0$.

$$(2)P=nx^{n+1}-(n+1)x^n+1 \text{ et } Q=(x-1)^2.$$

On a $P(1)=0$ et $P'(x)=n(n+1)x^n-n(n+1)x^{n-1}$, d'où $P'(1)=0$.

Alors 1 est une racine double de P, ce qui implique que Q divise P.

Exercice 06: Déterminons les entiers n tels que $(x+1)^n-x^n-1$ soit divisible par x^2+x+1.

Pour $n=0; P=-1$ n'est pas divisible par x^2+x+1.

Pour $n=1; P=0$ est divisible par x^2+x+1.

Pour $n \geq 2$, on remarque que si x^2+x+1 divise $(x+1)^n - x^n - 1$ alors ces deux racines $\alpha = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $\bar{\alpha} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, sont des racines pour $(x+1)^n - x^n - 1$. D'autre part $\bar{\alpha} = \alpha^2$, $\alpha + 1 = -\bar{\alpha}$.

Donc: $P(\alpha) = (\alpha+1)^n - \alpha^n - 1 = \left(-\alpha^2\right)^n - \alpha^n - 1 = (-1)^n \alpha^{2n} - \alpha^n - 1$,

mais $\alpha^{3k+m} = \alpha^m$ car $\alpha\bar{\alpha} = 1, \bar{\alpha} = \alpha^2 \Rightarrow \alpha^3 = 1$. Pour cela il suffit de voir les cas suivants:

(1) $n = 6k \Rightarrow P(\alpha) = -1$.

(2) $n = 6k+1 \Rightarrow P(\alpha) = 0$.

(3) $n = 6k+2 \Rightarrow P(\alpha) = 2\alpha$.

(4) $n = 6k+3 \Rightarrow P(\alpha) = -3$.

(5) $n = 6k+4 \Rightarrow P(\alpha) = 2\alpha^2$.

(6) $n = 6k+5 \Rightarrow P(\alpha) = 0$.

Conclusion: pour que $(x+1)^n - x^n - 1$ soit divisible par x^2+x+1 il suffit que: $n \equiv \pm 1\,[6]$.

Exercice 07: Pour $n \in \mathbb{N}^*$ quel est l'ordre de multiplicité de 2 comme racine du polynôme:

$$P(x) = nx^{n+2} - (4n+1)\,x^{n+1} + 4(n+1)\,x^n - 4x^{n-1}.$$

On calcule après $P(2)$ les dérivées successives de P pour la valeur 2, en effet:

$$P(2) = 4n \times 2^n - 2(4n+1)\,2^n + 4(n+1)\,2^n - 2 \times 2^n = 0 \Rightarrow 2 \text{ est une racine.}$$

$$P'(x) = n(n+2)\,x^{n+1} - (4n+1)(n+1)\,x^n + 4n(n+1)\,x^{n-1} - (n-1)\,4x^{n-2} \Rightarrow P'(2) = 0.$$

$$P''(x) = n(n+1)(n+2)\,x^n - n(4n+1)(n+1)\,x^{n-1} + 4n(n+1)(n-1)\,x^{n-2} - (n-1)(n-2)\,4x^{n-3},$$

$\Rightarrow P''(2) = 2^n(2n-1) \neq 0$. Alors 2 est une racine d'ordre de multiplicité 2.

Exercice 08: Montrons que le polynôme:

$P(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$, n'admet pas de racines multiples.

Si P admet une racine multiple α alors: $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$. Mais

$$P(\alpha) - P'(\alpha) = \frac{\alpha^n}{n!} = 0 \Rightarrow \alpha = 0,$$

valeur qui n'annule pas P donc il n'ya pas de racine multiple.

Exercice 09: Déterminons $P \wedge Q$ et $P \vee Q$ dans les cas suivants:

$$(1) P(x) = -2x^4 + 2x^3 + 2x - 2 \text{ et } Q(x) = 3x^3 + 9x^2 + 9x + 6.$$

Il suffit d'appliquer la division euclidienne avec l'algorithme d'EUCLIDE.

Remarquons que 2 est un diviseur du polynôme $P(x)$ et de même pour 3 qui divise $Q(x)$, donc on utilise les formes nomalisées pour simplifier les calculs.

$$\begin{array}{l|l} x^4 - x^3 - x + 1 & x^3 + 3x^2 + 3x + 2 \\ \hline -(x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x) & x - 4 \\ = -4x^3 - 3x^2 - 3x + 1 & \\ -\left(-4x^3 - 12x^2 - 12x - 8\right) & \\ = 9x^2 + 9x + 9 & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l|l} x^3 + 3x^2 + 3x + 2 & x^2 + x + 1 \\ \hline -(x^3 + x^2 + x) & x + 2 \\ = 2x^2 + 2x + 2 & \\ -\left(2x^2 + 2x + 2\right) & \\ = 0 & \end{array}$$

Donc $P \wedge Q = x^2 + x + 1$. D'où:

$$\frac{P \times Q}{P \wedge Q} = 3\left(-2x^4 + 2x^3 + 2x - 2\right)(x + 2) = -6\left(x^4 - x^3 - x + 1\right)(x + 2).$$

$\Rightarrow P \vee Q = \left(x^4 - x^3 - x + 1\right)(x + 2).$

$$(2) P(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3 \text{ et } Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1.$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 + x^2 - 5x + 3 & 2x^3 - 3x^2 + 1 \\ \hline -(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}) & \frac{1}{2} \\ = \frac{5}{2}x^2 - 5x + \frac{5}{2} & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l|l} 2x^3 - 3x^2 + 1 & x^2 - 2x + 1 \\ \hline -(2x^3 - 4x^2 + 2x) & 2x + 1 \\ = x^2 - 2x + 1 & \\ -\left(x^2 - 2x + 1\right) & \\ = 0 & \end{array}$$

Donc $P \wedge Q = x^2 - 2x + 1$. D'où:

$$\frac{P \times Q}{P \wedge Q} = \left(x^3 + x^2 - 5x + 3\right)(2x + 1) = 2\left(x^3 + x^2 - 5x + 3\right)\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

$\Rightarrow P \vee Q = \left(x^3 + x^2 - 5x + 3\right)\left(x + \frac{1}{2}\right).$

$$(3) P(x) = x^n - 1 \text{ et } Q(x) = (x-1)^n, n \geq 1.$$

Les diviseurs de $Q(x)$ sont de la forme $(x-1)^k, k \geq 1$, donc il suffit de voir la plus grande puissance $(x-1)^\alpha$ qui divise le polynôme $P(x)$.

On remarque que est une racine simple car $P(1) = 0$ et $P'(1) \neq 0$, alors $P \wedge Q = x - 1$.

$\Rightarrow P \vee Q = \frac{P \times Q}{P \wedge Q} = (x^n - 1)(x-1)^{n-1}.$

Exercice 10: Soient $P(x) = x^4 + 1$ et $Q(x) = x^3 + 1$.

(1) Déterminons $U, V \in \mathbb{R}[X]$ tels que: $UP + VQ = 1$.

$$\begin{array}{l|l} x^4+1 & x^3+1 \\ \hline -(x^4+x) & x \\ = -x+1 & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l|l} x^3+1 & -x+1 \\ \hline -(x^3-x^2) & -x^2-x-1 \\ = x^2+1 & \\ -\left(x^2-x\right) & \\ = x+1 & \\ -(x-1) & \\ 2 & \end{array}.$$

Ce qui donne:

$$x^4 + 1 = x\left(x^3 + 1\right) - x + 1 \text{ et } x^3 + 1 = (-x+1)\left(-x^2 - x - 1\right) + 2.$$

D'où:

$$\begin{aligned} 2 &= \left(x^3+1\right) - (-x+1)\left(-x^2-x-1\right) \\ &= \left(x^3+1\right) - \left[\left(x^4+1\right) - x\left(x^3+1\right)\right]\left(-x^2-x-1\right), \end{aligned}$$

ce qui implique que:

$$2 = \left(x^2 + x + 1\right)\left(x^4 + 1\right) + \left[1 + x\left(-x^2 - x - 1\right)\right]\left(x^3 + 1\right).$$

Finalement on trouve:

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(x^2+x+1\right)\left(x^4+1\right)+\frac{1}{2}\left(-x^3-x^2-x+1\right)\left(x^3+1\right)=1,$$

c'est à dire:

$$P(x)=\left(\frac{1}{2}\right)\left(x^2+x+1\right) \text{ et } Q(x)=\frac{1}{2}\left(-x^3-x^2-x+1\right).$$

(2) $U \wedge V = 1$ car d'après Bézout U et V sont premiers entre eux.

Exercice 11: Décomposons en éléments simples les fractions rationnelles suivantes

$$(1)\frac{1}{x^4-x}=\frac{1}{x\left(x^3-1\right)}=\frac{1}{x\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)}=\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{x-1}+\frac{ax+b}{x^2+x+1},$$

$\Rightarrow \alpha=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3-1}=-1,\ \beta=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x(x^2+x+1)}=\frac{1}{3}, \alpha+\beta+a=\lim\limits_{x\to+\infty}x.\frac{1}{x^4-x}=0,$

$\Rightarrow a=-\beta-\alpha=\frac{2}{3}$ et par identification pour $x=-1\Rightarrow b=-\frac{1}{3}$.

$$(2)\frac{1}{x\left(x^2+x+1\right)^2}=\frac{\alpha}{x}+\frac{ax+b}{x^2+x+1}+\frac{cx+d}{\left(x^2+x+1\right)^2},$$

$\Rightarrow \alpha=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x(x^2+x+1)}=1, a+\alpha=\lim_{x\to+\infty}x.\frac{1}{x(x^2+x+1)^2}=0\Rightarrow a=-1,$
$\lim\limits_{x\to\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}cx+d=\lim\limits_{x\to\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\Rightarrow-\frac{c}{2}+d-ic\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}$
$\Rightarrow c=-1$ et $d=-1$.

Remarque 2.4 $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ *est une racine de* $\left(x^2+x+1\right)$. *Par suite: pour* $x=1\Rightarrow b=-1$.

$$(3)\frac{x^6}{\left(x^2+1\right)^2\left(x+1\right)^2}=1-\frac{2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x+1}{\left(x^2+1\right)^2\left(x+1\right)^2}.$$

Par suite on a:

$$\frac{2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x+1}{\left(x^2+1\right)^2\left(x+1\right)^2}=\frac{\alpha}{x+1}+\frac{\beta}{\left(x+1\right)^2}+\frac{ax+b}{x^2+1}+\frac{cx+d}{\left(x^2+1\right)^2},$$

$\Rightarrow \beta=\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x+1}{\left(x^2+1\right)^2}=-\frac{1}{4}$ et $a+\alpha=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\frac{2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x+1}{\left(x^2+1\right)^2\left(x+1\right)^2}\right)=2...(1)$.

$\lim\limits_{x\to i}\left(x^2+1\right)^2 \frac{2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x+1}{\left(x^2+1\right)^2(x+1)^2} = \lim\limits_{x\to i}(cx+d)$

$\Rightarrow -\frac{i}{2} = ci+d \Rightarrow c = \frac{-1}{2}$ et $d=0$. Pour $x=0 \Rightarrow 1 = \alpha+\beta+b+d \Rightarrow b+\alpha = \frac{5}{4}$...(2)

et pour $x=1 \Rightarrow \frac{15}{16} = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{16} + \frac{a+b}{2} - \frac{1}{8}$ $\quad (3)$, d'où d'après $(1), (2)$ et $(3) \Rightarrow \alpha = \frac{19}{4}, a = -\frac{11}{4}$ et $b = -\frac{7}{2}$.

$$(4)\ \frac{1}{x^{10}+x^6} = \frac{1}{x^6\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-x\sqrt{2}+1\right)}$$
$$= \frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\frac{a_3}{x^3}+\frac{a_4}{x^4}+\frac{a_5}{x^5}+\frac{a_6}{x^6}+\frac{b_1x+b_2}{\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)}+\frac{b_3x+b_4}{\left(x^2-x\sqrt{2}+1\right)}.$$

Puisque $\frac{1}{x^{10}+x^6}$ est une fonction paire alors: $a_1 = a_3 = a_5 = 0$ et $b_1 = -b_3, b_2 = b_4$.

mais: $\frac{1}{1+x^4} = 1 - x^4 + \frac{x^8}{1+x^4}$ d'après la division suivant les puissances croissantes.

Ce qui implique que:

$$\frac{1}{x^{10}+x^6} = \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{1+x^4}$$

d'où:

$$a_6 = 1, a_2 = -1 \text{ et } \frac{x^2}{1+x^4} = \frac{b_1x+b_2}{\left(x^2+1+x\sqrt{2}\right)} + \frac{-b_1x+b_2}{\left(x^2+1-x\sqrt{2}\right)},$$

pour $x=0 \Rightarrow b_2 = 0$ et par suite si $x=1 \Rightarrow b_1 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Chapitre 3

Méthodes d'intégrations

Si $F\ (x)$ est une fonction dont la dérivée $F\,'\,(x) = f\ (x)$ sur un certain intervalle de l'axe des x, alors $F\ (x)$ est appelée **primitive** ou **intégrale indéfinie** de $f\ (x)$. L'intégrale indéfinie d'une fonction donnée n'est pas unique; par exemple, x^2, $x^2 + 4$ et $x^2 + 7$ sont toutes des intégrales indéfinies de

$f\ (x) = 2x$, car elles sont décrites par la formule $F\ (x) = x^2 + C$, où C est une constante arbitraire, appelée constante d'intégration.

Le symbole $\int f\ (x)\ \mathrm{d}x$ désigne lintégrale indéfinie de $f\ (x)$. Ainsi, $\int 2x\ \mathrm{d}x = x^2 + C$.

3.1 Formules fondamentales d'intégration:

Un certain nombre des formules ci-dessous découlent immédiatement des formules courantes de dérivation, donc on a les propriétés et les formules suivantes:

$$
\begin{aligned}
1. \int \frac{d}{dx}\left[f\left(x\right)\right]\ \mathrm{d}x &= f\ \ (x)+C,\ C\in\mathbb{R}. \\
2. \int \left[f\left(x\right)+g\left(x\right)\right]\ \mathrm{d}x &= \int \left[f\left(x\right)\right]dx+\int \left[g\left(x\right)\right]\ dx. \\
3. \int \alpha\left[f\ \ (x)\right]\ \mathrm{d}x &= \alpha\int \left[f\left(x\right)\right]\ dx,\ \ \alpha\in\mathbb{R}. \\
4. \int x^{m}\ \mathrm{d}x &= \frac{x^{m+1}}{m+1},\ \ m\neq 1. \\
5. \int \frac{\mathrm{d}x}{x} &= \ln|x|+C. \\
6. \int e^{x}dx &= e^{x}+C. \\
7. \int a^{x}\mathrm{d}x &= \int e^{x\ln a}dx\ = \frac{a^{x}}{\ln a}+C,\quad a>0,a\neq 1. \\
8. \int \sin x\ \mathrm{d}x &= -\cos x+C. \\
9. \int \cos x\ \mathrm{d}x &= \sin x+C. \\
10. \int \tan x dx &= \ln|\sec x|+C.avec \sec x=\frac{1}{\cos x}et \cos ecx=\frac{1}{\sin x} \\
11. \int \cot an\ x\ \mathrm{d}x &= \ln|\sin x|+C. \\
12. \int \frac{1}{\cos^{2}x}\mathrm{d}x &= \tan x+C. \\
13. \int \frac{1}{\sin^{2}x}\mathrm{d}x &= -\cot an\ x+C. \\
14. \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}} &= \arcsin\frac{x}{a}\ \ +C. \\
15. \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^{2}-a^{2}}} &= \frac{1}{a}\ \ \mathrm{arcsec}\,\frac{x}{a}\ \ +C.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
16. \int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} &= \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} \; + C. \\
17. \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} &= \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) \; + C. \\
18. \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} &= \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| \; + C.
\end{aligned}$$

3.1.1 Formule de changement de variable:

Pour calculer une primitive $\int f\ (x)\ \mathrm{d}x$, il est souvent utile de remplacer la variable x par une nouvelle variable u, et ce en écrivant x comme fonction $g\,(u)$, ce qui nous ramènes à trouver une formule fondamentale. Par substitution, nous avons $x = g\,(u)$ et $\mathrm{d}x = g'\,(u)\ \mathrm{d}u$. L'équation:

$$\int f\,(x)\ \ \mathrm{d}x = \int f\,(g\,(u))\,g'\,(u)\ \ \mathrm{d}u.$$

s'applique et s'appelle la formule de changement de variable.

Exemple 3.1 *Pour calculer l'intégrale $\int (x+3)^{11}\ dx$, remplaçons $x+3$ par u. Ce qui donne $x = u-3 \Rightarrow dx = \ du \Rightarrow$*

$$\int (x+3)^{11}\,dx = \int (u)^{11}\,dx = \frac{1}{12}u^{12} + C = \frac{1}{12}\,(x+3)^{12} + C.$$

3.1.2 Formule de réduction:

Deux formules simples nous permettent de calculer plus rapidement les primitives.

La première est donnée par:

$$\int f'\,(x)\,[f\,(x)]^m\ \ \mathrm{d}x = \frac{1}{m+1}\,[f\ \ (x)]^{m+1} + C \qquad m \neq -1$$

Exemple 3.2

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx = \int \frac{1}{x}\,(\ln x)^2\,dx = \frac{1}{3}\,(\ln x)^3 + C$$

La seconde est:

$$\int \frac{f\ '\,(x)}{f\ \ (x)}\ dx = \ln|f\ \ (x)| + C$$

Exemple 3.3

$$\int \cot an\ x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + C.$$

3.2 Intégration par parties:

Remarque 3.1 *On utilise l'intégration par parties dans le cas où la fonction à intégrer est une fonction élémentaire ou produit des fonctions élémentaires suivantes:*

Fonctions trigonométriques, Polynômes,

Fonctions inverses des fonctions trigonométriques, $\ln(f\ \ (x)), e^{\ f\ (x)}, ...$

Ou bien dans les formules de réduction qui introduits pour chaque intégrale une nouvelle intégrale, de même forme que l'intégrale initiale, mais ayant un exposant réduit ou augmenté.

Exemple 3.4

$$\begin{aligned} 1. \int \left(x^2 - a^2\right)^m dx &= \frac{x\left(x^2 - a^2\right)^m}{2m+1} - \frac{2ma^2}{2m+1} \int \left(x^2 - a^2\right)^{m-1} dx, \quad m \neq -\frac{1}{2} \\ 2. \int \cos^m x \sin^n x\ dx &= -\frac{\cos^{m-1} x \sin^{n-1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \cos^{m-2} x \sin^n x\ dx, \quad m \neq -n \end{aligned}$$

3.2.1 Intégration par parties:

Si u et v sont des fonctions dérivables de x,

$$\begin{aligned} d(uv) &= u \text{ d}v + v \text{ d}u \\ &\Rightarrow udv = d(uv) - v \text{ d}u \\ &\Rightarrow \int u \text{ d}v = uv - \int v \text{ d}u \end{aligned}$$

ou:

$$\begin{aligned} \int f\ \ (x)\ \ g'\ \ (x)\ \ \mathrm{d}x &= f(x) g(x) - \int f'(x) g(x)\ \ \mathrm{d}x \\ \text{avec} &: f(x) = u \text{ et } g'(x)\ \ \mathrm{d}x = \mathrm{d}v \\ &\Rightarrow \mathrm{d}u = f'(x) \mathrm{d}x \text{ et } v = g(x) \end{aligned}$$

C'est la formule de l'intégration par parties. Deux règles générales se dégagent:

1. La partie prise comme dv doit être aisément intégrable.
2. $\int v \text{ d}u$ ne doit pas être plus complexe que $\int u \text{ d}v$.

Exemple 3.5 *Calculer:*

$$I = \int \ln\left(x^2+2\right)\ dx$$

Par parties on pose:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln\left(x^2+1\right)\ \ et\ g'(x) = 1 \\
&\Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{x^2+2} et\ g\ \ (x) = x \\
I &= \int f(x)\, g'(x)\ \ dx = f\ \ (x)\ \ g\ \ (x) - \int f\ '(x)\ \ g\ \ (x)\ \ dx \\
&= x\ln\left(x^2+1\right) - \int \frac{2x^2}{x^2+2}\ \ dx \\
&= x\ln\left(x^2+1\right) - \int \left(2 - \frac{4}{x^2+2}\right)\ \ dx \\
&= x\ln\left(x^2+1\right) - \int 2dx + 2\int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\ \ dx \\
&= x\ln\left(x^2+1\right) - 2x + 2\sqrt{2}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + C
\end{aligned}$$

3.3 Intégrales trigonométriques:

3.3.1 Les identités trigonométriques:

Dans ce chapitre, pour calculer les intégrales trigonométriques, on utilise les identités suivantes:

$$\begin{aligned}
1.\quad \sin^2 x+\cos^2 x &= 1, \qquad 2.\ 1+\tan^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}\\
3.\ \ 1+\cot an^2 x &= \frac{1}{\sin^2 x}, \qquad 4.\ \ \sin^2 x=\frac{1}{2}\left(1-\cos 2x\right)\\
5.\quad \cos^2 x &= \frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right), \qquad 6.\ \ \sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x\\
&\ 7.\ \ \sin x\cos y=\frac{1}{2}\left[\sin\left(x-y\right)+\sin\left(x+y\right)\right]\\
8.\sin x\sin y &= \frac{1}{2}\left[\cos\left(x-y\right)+\cos\left(x+y\right)\right]\\
&\ 9.\ \ \cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos\left(x-y\right)+\cos\left(x+y\right)\right]\\
10.1-\cos x &= 2\sin^2\frac{1}{2}x\\
&\ 11.\ 1+\cos x=2\cos^2\frac{1}{2}x,\\
12.1\pm\sin x &= 1\pm\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)
\end{aligned}$$

Par la suite on applique les deux règles:

$$\begin{aligned}
1.\ \text{Pour}\int\cos^m x\sin^n x\ \mathrm{d}x\quad &:\quad \text{si } m \text{ est impair, on pose } u=\cos x.\ \text{Si } n \text{ est impair, on pose } u=\sin x.\\
2.\ \text{Pour}\int\tan^m x\sec^n x\ \mathrm{d}x\quad &:\quad \text{si } n \text{ est pair, on pose } u=\tan x.\ \text{Si } m \text{ est impair, on pose } u=\sec x.\\
\text{avec}\ \sec x\quad &=\quad \frac{1}{\sin x}.
\end{aligned}$$

Exemple 3.6 (A)

1^{er} *cas: les intégrales de types:* $\int\sin^n x\ dx$ *ou* $\int\cos^n x\ dx$ *avec* n *est un entier pair.*

Dans ce cas on utilise la forme linéaire de $\sin^2 x$ *ou* $\cos^2 x$ *c'est- à- dire: les deux formules 4 et 5, pour obtenir des formules fondamentales.*

Exemple 3.7 (1)

$$\int \sin^2 x \ dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \ dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

Exemple 3.8 (2)

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x \ dx &= \int \left(\cos^2 x\right)^2 \ dx = \int \left[\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right]^2 dx \\ &= \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) \ dx \\ &= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x \ dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x \ dx \\ &= \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x \ dx\end{aligned}$$

mais dans $\int \cos^2 2x \ dx$ *on pose* : $t = 2x \Rightarrow dt = 2dx \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{2}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \ & \int \cos^2 2x \ dx = \frac{1}{2}\int \cos^2 t \ dt \\ = \ & \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\, dt \\ = \ & \frac{1}{4}\int dt + \frac{1}{4}\int \cos 2t\, dt \\ = \ & \frac{t}{4} + \frac{1}{6}\sin 2t + C_1 \\ = \ & \frac{2x}{4} + \frac{1}{6}\sin 4x + C_1 \\ \Rightarrow \ & \int \cos^4 x \ dx = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\left(\frac{2x}{4} + \frac{1}{6}\sin 4x + C_1\right) + C_2 \\ = \ & \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{8} + \frac{1}{24}\sin 4x + C \\ = \ & \frac{3x}{8} + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{24}\sin 4x + C\end{aligned}$$

Exemple 3.9 (B)

$2^{\text{ème}}$ *cas: les intégrales de types:* $\int \sin^n x \ dx$ *ou* $\int \cos^n x \ dx$ *avec* n *est un entier impair.*

Alors dans les deux cas on pose: $n = n - 1 + 1$ *ensuite on utilise la 1ère formule c'est à dire:*

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \text{ pour l'indice } n-1 \text{ qui est une puissance paire, ce qui permet de donner} \\ & \quad \text{une intégrale de type formule de réduction.} \end{aligned}$$

$$\int f'(x)\,[f(x)]^m \; dx.$$

Exemple 3.10 (1)

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \; dx &= \int \sin^2 x \sin x \; dx = \int \left(1 - \cos^2 x\right) \sin x \; dx = \int \sin x \; dx + \int \cos^2 x \,(-\sin x) \; dx \\ &= -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C. \end{aligned}$$

Exemple 3.11 (2)

$$\begin{aligned} \int \sin^5 x \; dx &= \int \sin^4 x \sin x \; dx = \int \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \sin x \; dx \\ &= \int \sin x \; dx - \int \cos^4 x \,(-\sin x) \; dx + 2 \int \cos^2 x \,(-\sin x) \; dx \\ &= -\cos x + \frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{2}{3} \cos^3 x + C. \end{aligned}$$

Exemple 3.12 (C)

$3^{ème}$ *cas: les intégrales de types:* $\int \sin^n x \cdot \cos^m x \; dx$ *avec*

l'un des deux indices (n, m) *est un entier impair.*

C'est pratiquement la même chose comme l'exemple(B), on applique la même méthode pour l'indice impair, mais si les deux

sont impairs alors le meilleurs choix est le plus petit.

Exemple 3.13 (1)

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x \ \cdot \cos^4 x \ dx &= \int \sin^2 x \ \cdot \cos^4 x \ \sin x \ dx = \int \left(1-\cos^2 x\right) \cdot \cos^4 x \ \sin x \ dx \\ &= -\int \cos^4 x \ (-\sin x\ )\, dx + \int \cos^6 x \ (-\sin x\ )\, dx \\ &= -\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x + C.\end{aligned}$$

Exemple 3.14 (2)

$$\begin{aligned}\int \sin^5 x \ \cdot \cos^7 x \ dx &= \int \left(\sin^2 x\right)^2 \ \cdot \cos^7 x \ \sin x \ dx = \int \left(1-\cos^2 x\right)^2 \cdot \cos^7 x \ \sin x \ dx \\ &= -\int \cos^7 x \ (-\sin x\ )\, dx - \int \cos^{11} x \ (-\sin x\ )\, dx + 2\int \cos^9 x \ (-\sin x\ )\, dx \\ &= -\frac{1}{8}\cos^8 x - \frac{1}{12}\cos^{12} x + \frac{2}{10}\cos^{10} x + C.\end{aligned}$$

Exemple 3.15 (D)

$4^{\text{ème}}$ *cas: les intégrales de types:* $\int \sin^n x \ \cdot \cos^m x \ dx$ *avec*

les deux indices (n, m) *sont des entiers pairs.*

On applique la forrmule suivante: $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$ *et la forme linéaire de* $\cos$ *inus ou sinus.*

Exemple 3.16 (1)

$$\int \sin^4 x \ \cdot \cos^4 x \ dx = \frac{1}{16}\int (\sin 2x)^4 \ dx = \frac{1}{32}\int \sin^4 t \ dx$$

qui est de type (A).

Exemple 3.17 (2)

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 3x \cdot \cos^2 3x dx &= \int \left(\sin^2 3x \cdot \cos^2 3x\right) \sin^2 3x \ \ dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 6x \left(1 - \cos 6x\right) \ \ dx \\
&= \frac{1}{8} \int \sin^2 6x \ \ dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 6x \cos 6x \ \ dx \\
&= \frac{1}{16} \int \left(1 - \cos 12x\right) \ \ dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 6x \cos 6x \ \ dx \\
&= \frac{1}{16} x - \frac{1}{192} \sin 12x - \frac{1}{144} \sin^3 x + C.
\end{aligned}$$

Remarque 3 *On applique les mêmes méthodes dans le cas des intégrales qui contients les fonctions:* $\tan x, \cot anx, \sec x, \cos ecx$.

Exemple 3.18

$$\begin{aligned}
\int \tan^5 x \ \ dx &= \int \tan^3 x \ \ \tan^2 x dx = \int \tan^3 x \ \ \left(\sec^2 x - 1\right) dx \\
&= \int \tan^3 x \ \ \sec^2 x dx - \int \tan^3 x \ \ dx \\
&= \int \tan^3 x \ \ \sec^2 x dx - \int \tan x \ \ \left(\sec^2 x - 1\right) dx \\
&= \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln\left|\sec x\right| + C.
\end{aligned}$$

3.4 Subtitutions trigonométriques:

Quelques intégrales contient l'un des facteurs suivants:

$$\sqrt{a^2 - b^2 x^2}, \sqrt{a^2 + b^2 x^2} \text{ ou } \sqrt{b^2 x^2 - a^2}$$

mais aucun autre facteur irrationnel, dont on peut la remplacer par une nouvelle intégrale qui est trigonométrique après un chagement de variable.

1. Si la fonction à intégrer contient un facteur $\sqrt{a^2 - b^2x^2}$, on pose $x = \frac{a}{b} \sin z$ et on obtient: $a\sqrt{1 - \sin^2 z} = a \cos z$.

2. Si la fonction à intégrer contient un facteur $\sqrt{a^2 + b^2x^2}$, on pose $x = \frac{a}{b} \tan z$ et on obtient: $a\sqrt{1 + \tan^2 z} = a \sec z$.

3. Si la fonction à intégrer contient un facteur $\sqrt{b^2x^2 - a^2}$, on pose $x = \frac{a}{b} \sec z$ et on obtient:

$a\sqrt{\sec^2 z - 1} = a\tan z$.

Exemple 3.19 (1)

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$$

on pose: $x = 2\tan z \Rightarrow dx = 2\sec^2 z \ dz,\ \sqrt{4+x^2} = 2\sec z$ *d'où:*

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{2\sec^2 z \ dz}{(4\tan^2 z)(2\sec z)} = \frac{1}{4}\int \frac{\sec z}{\tan^2 z} \ dz = \frac{1}{4}\int \sin^{-2} z\cos z \ dz \\ &= -\frac{1}{4\sin z} + C = -\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x} + C. \end{aligned}$$

Exemple 3.20 (2)

$$I_2 = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} \ dx$$

on pose: $x = 2\sec z \Rightarrow dx = 2\sec z\tan z \ dz,\ \sqrt{x^2-4} = 2\tan z$ *d'où:*

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{4\sec^2 z\,(2\sec z\tan z) \ dz}{2\tan z} = 4\int \sec^3 z \ dz \\ &= 2\sec z\tan z + 2\ln|2\sec z + \tan z| + C \\ &= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-4} + 2\ln\left|x + \sqrt{x^2-4}\right| + C. \end{aligned}$$

Exemple 3.21 (3)

$$I_3 = \int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x} \ dx$$

on pose: $x = \frac{3}{2}\sin z \Rightarrow dx = \frac{3}{2}\cos z \ dz,\ \sqrt{9-4x^2} = 3\cos z$ *d'où:*

$$\begin{aligned} I_3 &= 3\int \frac{\cos^2 z \ dz}{\sin z} = 3\int \frac{1-\sin^2 z}{\sin z} dz \\ &= 3\int \cos ec \ z - 3\int \sin z \ dz \\ &= 3\ln|\cos ecz - \cot an \ z| + 3\cos z + C. \\ &= 3\ln\left|\frac{3-\sqrt{9-4x^2}}{x}\right| + \sqrt{9-4x^2} + C \end{aligned}$$

3.5 Intégration par fractions partielles:

Théoriquement tout polynômes à coefficients réels peut s'exprimer comme produit de facteurs linéaires réels de la forme $ax + b$ et d'autre quadratiques de la forme $ax^2 + bx + c$.

Un polynôme quadratique $\left(ax^2 + bx + c\right)$ est réductible ssi $\triangle = b^2 - ac \geq 0$ et il est irréductible ssi $\triangle < 0$ (Dans ce cas les racines ne sont pas réelles).

3.5.1 Fraction rationnelle:

Une fraction rationnelle est une fonction $H(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, où $f(x)$ et $g(x)$ sont des polynômes. Si le degré $f(x)$ est inférieur au degré de $g(x)$, on dit que $H(x)$ est une fraction rationnelle propre, autrement, on dit que $H(x)$ est impropre. Dans ce cas on peut exprimer $H(x)$ comme la somme d'un polynôme et d'une fraction rationnelle propre par la méthode de la division euclidienne. Alors pour intégrer une fraction rationnelle $H(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ on suit les étapes suivantes:

La division euclidienne:

Il faut ramener l'intégrale à une intégrale d'une fraction propre si non on utilise la division euclidienne si la fraction est impropre ce qui donne deux intégrales la $1^{ère}$ est polynômiale et l'autre est une intégrale d'une fraction propre.

Intégration des fractions rationnelles propres:

Si $H(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ avec le degré $f(x)$ est inférieur au degré de $g(x)$.

$1^{ère}$ étape: La décomposition du dénominateur:

On décompose le dénominateur comme produit des facteurs qui sont parmis les types suivants:

1- Facteurs linéaires distincts:

Un facteur linéaire est de la forme: $ax + b$.

2- Facteurs linéaires répétés:

Un facteur linéaire répété qui est de la forme: $(ax + b)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$.

3-Facteurs quadratiques distincts:

C'est un facteur de la forme $ax^2 + bx + c$ en plus il est irréductible.

4- Facteurs quadratiques répétés:

C'est un facteur de la forme $\left(ax^2+bx+c\right)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$ de plus ax^2+bx+c est irréductible.

$2^{ème}$ étape: La décomposition en éléments simples:

C'est l'écriture d'une fraction rationnelle propre comme somme d'éléments simples qui sont en général de la forme:

$$\frac{A_1}{a_1x+b_1}, \frac{B_1}{\left(c_1x+d_1\right)^n}, \frac{\alpha_1 x+\beta_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}, \text{ et } \frac{\alpha_2 x+\beta_2}{\left(a_3x^2+b_3x+c_3\right)^m}.$$

d'une façon que les dénominateurs des éléments simples sont tous les cas possibles tel que sont dénominateur commun est $g\ (x)$.

Exemple 3.22

$$\begin{aligned}\frac{x}{(x+1)\,(x-1)^2\,(x^2+x+1)\,(x^2+x+3)^2} &= \frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{A_3}{(x-1)^2} \\ &+\frac{ax+b}{x^2+x+1}+\frac{cx+d}{x^2+x+3}+\frac{ex+f}{(x^2+x+3)^2}\end{aligned}$$

Remarque 3.2 *Le nombre d'éléments simples est la somme des puissances des facteurs qui forment le dénominateur. De plus il faut calculer les constantes* $(A_1, , A_2, A_3, a, b, c, d, e$ *et* $f)$ *par la méthode du dénominateur commun et l'identification avec le numérateur du fraction rationnelle.*

$3^{ème}$ étape: Le calcul de l'intégrale de chaque élément simple:

On a quatre types d'intégrales:

1-

$$\int \frac{A_1}{a_1x+b_1}\ \mathrm{d}x = \frac{A_1}{a_1}\ln\left(a_1x+b_1\right)+C, C \in \mathbb{R}$$

2-

$$\int \frac{B_1}{\left(c_1x+d_1\right)^n}\ \mathrm{d}x = \frac{B_1}{c_1\left(-n+1\right)}\left(c_1x+d_1\right)^{-n+1}+C, C \in \mathbb{R}$$

3-

$$\int \frac{\alpha_1 x+\beta_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}\ \mathrm{d}x = \alpha\ln\left(a_2x^2+b_2x+c_2\right)+\beta\ \arctan\left(\mu x+\theta\right)+C, C\alpha,\beta,\mu,\theta \in \mathbb{R}$$

Exemple 3.23 *Calculer l'intégrale:*

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{4x+3}{2x^2+x+3}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{4x+3}{x^2+\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}\ dx \\
&= \frac{4}{2}\int \frac{x+\frac{3}{4}}{x^2+\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}\ dx = \int \frac{2x+\frac{3}{2}}{x^2+\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}\ dx \\
&= \int \frac{2x+\frac{1}{2}+1}{x^2+\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}\ dx \\
&= \int \frac{2x+\frac{1}{2}}{x^2+\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}\ dx + \int \frac{1}{x^2+\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}\ dx \\
&= \ln\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\right) + \int \frac{1}{x^2+\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}\ dx
\end{aligned}$$

pour l'intégrale:

$$\begin{aligned}
J &= \int \frac{1}{x^2+\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}\ dx = \int \frac{1}{x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{16}+-\frac{1}{16}+\frac{3}{2}}\ dx \\
&= \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{23}{16}}\ dx = \frac{16}{23}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{23}{16}}\ dx \\
&= \frac{16}{23}\int \frac{1}{\left(\frac{4x+1}{\sqrt{23}}\right)^2+1}\ dx \\
\textit{on pose} \quad &: \quad y = \frac{4x+1}{\sqrt{23}} \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{23}}{4}dx \\
&\Rightarrow \ J = \frac{4}{\sqrt{23}}\int \frac{1}{y^2+1}dy = \frac{4}{\sqrt{23}}\arctan y + C_1, C_1 \in \mathbb{R} \\
&= \ \frac{4}{\sqrt{23}}\arctan\left(\frac{4x+1}{\sqrt{23}}\right) + C_1, C_1 \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow \ I = \ln\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\right) + \frac{4}{\sqrt{23}}\arctan\left(\frac{4x+1}{\sqrt{23}}\right) + C, C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

4-

$$\int \frac{\alpha_2 x+\beta_2}{\left(a_3x^2+b_3x+c_3\right)^m}\mathrm{d}x = \frac{1}{m+1}\left(a_3x^2+b_3x+c_3\right)^{-m+1} + \int \frac{\lambda}{\left(a_3x^2+b_3x+c_3\right)^m}\mathrm{d}x \text{ avec } m \neq 1\ .$$

pour l'intégrale:

$$\int \frac{\lambda}{\left(a_3x^2+b_3x+c_3\right)^m}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \delta\int \frac{\mathrm{d}y}{\left(y^2+1\right)^m} \text{ avec } m \neq 1 \text{ (Les substitutions trigonométriques).}$$

3.6 Divers changements de variable:

Si la fonction à intégrer contient des radicaux de la forme:

1- $\sqrt[n]{ax+b}$, alors le changement de variable consiste à poser $ax+b=z^n$ pour obtenir une fraction rationnelle.

2- $\sqrt{x^2+ax+b}$ avec un $\triangle<0$, alors le changement de variable consiste à poser $x^2+ax+b=(z-x)^2$ pour obtenir une fraction rationnelle.

3- $\sqrt{(a+x)(b-x)}$, alors le changement de variable consiste à poser$(a+x)(b-x)=(a+x)^2z^2$ ou $(a+x)(b-x)=(b-x)^2z^2$ pour obtenir une fraction rationnelle.

4- Si la fonction à intégrer contient des facteurs cosinus ou sinus dans le numérateur ou bien dans le dénominateur, alors on pose:

$$\begin{aligned}
x &= 2\arctan z \Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}z}{1+z^2} \\
\text{avec} &: \sin x=\frac{2z}{1+z^2} \text{ et } \cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}.
\end{aligned}$$

Remarque 3.3 *On peut trouver des changements de variables qui sont suggérés par la forme de la fonction à intégrer.*

Exemple 3.24 (1)

$$\begin{aligned}
I &= \int x^5\sqrt{1-x^3}dx \\
\textit{on pose} &: 1-x^3=z^2\Rightarrow 3x^2dx=-2z\ dz \\
I &= \int x^3\sqrt{1-x^3}x^2\ dx=\int\left(1-z^2\right)z\left(-\frac{2}{3}z\ dz\right) \\
&= -\frac{2}{3}\left(\frac{z^3}{3}-\frac{z^5}{5}\right)+C=-\frac{2}{45}\left(1-x^3\right)^{\frac{3}{2}}\left(2+3x^3\right)+C.
\end{aligned}$$

Exemple 3.25 (2) *Dans l'intégrale:*

$$\begin{aligned}
J &= \int \frac{\sqrt{x-x^2}}{x^4}dx \text{ , } \textit{on pose: } x=\frac{1}{z} \\
\textit{on trouve} &: \ J=-\int z\sqrt{z-1}\ dz \\
\textit{ensuite on pose} &: \ z-1=t^2. \\
J &= -2\left[\frac{(1-x)^{\frac{5}{2}}}{5x^{\frac{5}{2}}}+\frac{(1-x)^{\frac{3}{2}}}{3x^{\frac{3}{2}}}\right]+C.
\end{aligned}$$

Pour les premiers changements de variables on propose les exemples suivants:

Exemple 3.26 (1)

$$I_1=\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}}$$

On pose: $x+2=z^2 \Rightarrow dx=2z\ dz$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{2z\ dz}{z(z^2-4)}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-2}{z+2}\right|+C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+2}+2}\right|+C
\end{aligned}$$

Exemple 3.27 (2)

$$I_2=\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+2}}$$

alors on pose:

$$\begin{aligned}
x^2+x+2 &= (z-x)^2 \Rightarrow x=\frac{z^2-2}{1+2z} \\
&\Rightarrow dx=\frac{2\left(z^2+z+2\right)}{(1+2z)^2}dz \ \textit{ et } \sqrt{x^2+x+2}=\frac{z^2+z+2}{1+2z} \\
&\Rightarrow I_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+x+2}+x-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+x+2}+x+\sqrt{2}}\right|+C
\end{aligned}$$

Exemple 3.28 (3)

$$I_3=\int \frac{x\,dx}{(5-4x-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

On pose:

$$\left(5-4x-x^2\right)=(5+x)(1-x)=(1-x)^2z^2$$

Alors:

$$x = \frac{z^2-5}{1+z^2} \quad , \; dx = \frac{12z \;\, dz}{\left(1+z^2\right)^2} \;\; et \;\sqrt{5-4x-x^2} = (1-x)\, z = \frac{6z}{1+z^2}$$

D'où:

$$I_3 = \frac{1}{18}\left(z + \frac{5}{z}\right) + C = \frac{5-2x}{9\sqrt{5-4x-x^2}} + C$$

Exemple 3.29 (4)

$$I_4 = \int \frac{dx}{1+\sin x - \cos x}$$

On pose:

$$\begin{aligned}
x &= 2\arctan z \Rightarrow dx = \frac{2\,dz}{1+z^2} \\
avec &: \sin x = \frac{2z}{1+z^2} \;\; et \;\; \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}. \\
&\Rightarrow I_4 = \int \frac{dz}{z\,(1+z)} = \ln\left|\frac{z}{1+z}\right| + C \\
&= \ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}\right| + C
\end{aligned}$$

3.7 Intégration des fonctions hyperboliques:

On a:

$$\begin{aligned}
ch\ x &= \frac{e^x+e^{-x}}{2} \text{ et } sh\ x = \frac{e^x-e^{-x}}{2} \\
avec &: ch^2x - sh^2x = 1
\end{aligned}$$

D'où les formules d'intégration qui découlent directement des formules de dérivation.

$$
\begin{array}{rclrl}
1. \displaystyle\int sh\ x\ \mathrm{d}x & = & ch\ x + C & 2. \displaystyle\int ch\ x\ \mathrm{d}x = sh\ x + C \\
3. \displaystyle\int th\ x\ \mathrm{d}x & = & \ln ch\ x + C & 4. \displaystyle\int \coth\ x\ \mathrm{d}x = \ln |sh\ x| + C \\
5. \displaystyle\int \mathrm{sech}^2\ x\ \mathrm{d}x & = & th\ x + C & 6. \displaystyle\int \mathrm{cosech}^2\ x\ \mathrm{d}x = -\coth\ x + C \\
7. \displaystyle\int \mathrm{sech}\ x\ th\ x\ \mathrm{d}x & = & -\sec h\ x + C & 8. \displaystyle\int \mathrm{cosech}\ x\ \coth\ \mathrm{x}\ \mathrm{d}x = sh\ x + C \\
9. \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\ \mathrm{d}x & = & sh^{-1}\ \dfrac{x}{a} + C & 10. \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\ \mathrm{d}x = ch^{-1}\ \dfrac{x}{a} + C\ ,\ x > a > 0 \\
11. \displaystyle\int \frac{1}{a^2-x^2}\ \mathrm{d}x & = & \dfrac{1}{a} th^{-1}\ \dfrac{x}{a} + C\ ,\ x^2 < a^2 & 12. \displaystyle\int \frac{1}{x^2-a^2}\ \mathrm{d}x = -\dfrac{1}{a}\coth^{-1}\ \dfrac{x}{a} + C\ ,\ x^2 > a^2
\end{array}
$$

Remarque 3.4 *On peut utiliser les deux formules exponentielles pour calculer les intégrales qui contient ch x et sh x. Dans ce cas on pose* $y = e^x$ *alors* $dy = e^x dx$ *d'où* $dx = \frac{dy}{y}$ *et on trouve des intégrales des fractions rationnelles.*

Remarque 3.5 *Dans les deux chapitres espaces vectoriels et applications linéaires il faut voir que la définition d'une base dans le premier et c'est quoi une application linéaire dans le deuxième.*

Chapitre 4

Équations différentielles

Dans ce chapitre nous allons apprendre à résoudre les cas les plus élémentaires des équations différentielles du premier ordre et du second ordre à coefficients constantes

Défintion:

De nombreux problèmes d'origine physique, économique, etc. Conduisent à rechercher une fonction y d'une variable réelle x sachant qu'il existe une relation entre x, y et les dérivées $y^{(n)}$ avec $n \geq 1$. Une telle relation est dite équation différentielle d'ordre n et elle est de la forme:

$$f\ \left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0 \text{ où } f \text{ est une fonction.}$$

4.1 Équations différentielles d'ordre1

Une équation différentielle d'ordre 1 est une équation de la forme:

$$f\ \left(x, y, y'\right) = 0 \text{ avec } y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

4.1.1 Équations à variables séparables ou séparées

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Une équation différentielle à variables séparables est du type:

$$y' = \frac{f\ (x)}{g\ (y)}.$$

Ce qui implique que:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{f\ \ (x)}{g\ \ (y)} \Rightarrow g\ \ (y)\,\mathrm{d}y = f\ \ (x)\,\mathrm{d}x \\ &\Rightarrow \int g\ \ (y)\,\mathrm{d}y = \int f\ \ (x)\,\mathrm{d}x + c,\ c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Exemple:

$$y'\left(x^2-1\right) - 2xy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\left(x^2-1\right) - 2xy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{2x}{(x^2-1)}\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{2x}{(x^2-1)}\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \ln\left|x^2-1\right| + \ln c, c \in \mathbb{R}_+^*$$

$$\Rightarrow y = c_1\left(x^2-1\right) \text{ où } c_1 \in \mathbb{R}^*$$

4.1.2 Équations homogènes en x et y

C'est une équation du type:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

On introduit la fonction auxiliaire $x \mapsto \mathrm{t} = \frac{y}{x}$; on a $y = \mathrm{t}\ x$ et $y' = \mathrm{t}'x + \mathrm{t}$. Finallement on a une équation à variables séparables:

$$\begin{aligned}\mathrm{t}' &= \frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{d}x} = \frac{f\ \ (\mathrm{t}) - \mathrm{t}}{x} \\ &\Rightarrow \frac{\mathrm{dt}}{f\ \ (\mathrm{t}) - \mathrm{t}} = \frac{\mathrm{d}x}{x}\end{aligned}$$

Exemple:

$$
\begin{aligned}
(2x+y)\ \mathrm{d}x-(4x-y)\,\mathrm{d}y &= 0\\
&\Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(2x+y)}{(4x-y)}\\
&\Rightarrow y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\left(2+\frac{y}{x}\right)}{\left(4-\frac{y}{x}\right)}\\
\text{on pose}\quad :\mathrm{t} &= \frac{y}{x}\Rightarrow y=\mathrm{t}\ x\Rightarrow y'=\mathrm{t}'x+\mathrm{t}\\
&\Rightarrow \mathrm{t}'x+\mathrm{t}=\frac{(2+\mathrm{t})}{(4-\mathrm{t})}\\
&\Rightarrow \mathrm{t}'x=\frac{(2+\mathrm{t})}{(4-\mathrm{t})}-\mathrm{t}=\frac{\mathrm{t}^2-3\mathrm{t}+2}{(4-\mathrm{t})}\\
&\Rightarrow \frac{(4-\mathrm{t})}{\mathrm{t}^2-3\mathrm{t}+2}\mathrm{dt}=\frac{\mathrm{d}x}{x}\\
\text{après résolution on a}\quad &:\quad \ln|x|+\ln c=\ln\frac{(\mathrm{t}-2)^2}{|\mathrm{t}-1|^3},c\in\mathbb{R}_+^*\\
&\Rightarrow \frac{(\mathrm{t}-2)^2}{|\mathrm{t}-1|^3}=k\ x\text{ où }k\in\mathbb{R}^*\\
&\Rightarrow (y-2x)^2=k\ (y-x)^3\ \text{ où }\ k\in\mathbb{R}^*
\end{aligned}
$$

Ainsi toutes les solutions de l'équation donnée sont définies par:

$$(y-2x)^2=k\ (y-x)^3\ \text{ où }\ k\in\mathbb{R}^*$$

4.1.3 Équations linéaires

C'est une équation de la forme:

$$y'=a\ (x)\,y+b\,(x) \qquad (1)$$

où $a\ (x)$ et $b\ (x)$ sont deux fonctions continues sur un intervalle I.

L'équation:

$$y'=a\ (x)\,y \qquad (2)$$

est l'équation -homogène- ou -sans second membre- associée à (1).

Ainsi, la solution générale de (1) est la somme d'une solution particulière de cette équation

(1) et de la solution générale de l'équation homogène associée (2). Si on ne connaît aucune solution apparente de (1): on résout (2) , et on obtient sa solution générale $y = \lambda y_1$, où λ est une constante et $y_1 = e^A$, A étant une primitive de $a\ (x)$ sur I. Par suite on fait varier la constante. Posant, dans (1),

$$\begin{aligned} y\ (x) &= \lambda\ (x)\, y_1\ (x) \text{ on obtient:} \\ \lambda'(x)\, y_1(x) + \lambda(x)\, y_1'(x) &= a(x)\,\lambda(x)\, y_1(x) + b(x) \\ &\Rightarrow \lambda'(x)\, y_1(x) = b(x) \\ &\quad\ \text{car } y_1 \text{ est une solution de (2).} \\ &\quad\ \text{d'ou la connaissance de } \lambda', \text{ et celle de } \lambda \text{ par intégration.} \end{aligned}$$

Cette technique est connue sous le nom, de méthode de variation de le constante.

Exemple1: (la solution particulière)

L'équation:

$$y' \ \cos x + y \ \sin x = 1 \qquad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \text{ est linéaire.} \qquad (1)$$

Une solution évidente de étant $x \mapsto y_0(x) = \sin x$ et une solution apparente de l'équation homogène étant $x \mapsto y_1(x) = \cos x$, la solution générale de (1) est:

$$\begin{aligned} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sin x + \lambda \cos x \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Remarquons que ces solutions sont valables sur $\mathbb{R}$.

Exemple2: (la méthode de la variation de la constante)

L'équation:

$$y' \ + 2x\ y \ = 2x\ e^{-x^2} \qquad x \in \mathbb{R}, \text{ est linéaire.} \qquad (1)$$

Une solution de l'équation homogène $y'\ + 2x\ y = 0$ étant $x \mapsto y_1(x) = \lambda e^{-x^2}$. Employons la méthode de de la variation de la constante et reportons dans (1) $y\ (x) = \lambda (x)\ e^{-x^2}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \lambda' (x) = 2x \\ &\Rightarrow \quad \lambda (x) = \int 2x \mathrm{d}x \\ &\Rightarrow \quad \lambda (x) \ = x^2 + k \quad \text{ où } \ k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ainsi

$$y = \left(x^2 + k\right) e^{-x^2} \text{où } \ k \in \mathbb{R}$$

est une solution générale de l'équation (1).

4.1.4 Équation de bernoulli

Une équation de la forme:

$$y' = a\ (x)\, y + b\,(x)\ y^{\alpha} \qquad (x \in I) \text{ où } \alpha \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

où $a\ (x)$ et $b\ (x)$ sont deux fonctions continues sur un intervalle I.

Cette équation est linéaire pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$. Dans le cas général, en l'écrivant:

$$y' y^{-\alpha} \ = a\ (x)\, y^{1-\alpha} + b\,(x)$$

donc si on pose: $z = y^{1-\alpha}$; on est alors ramené à une équation linéaire:

$$z' = (1 - \alpha)\left[a\ (x)\, z + b\,(x)\right]$$

Exemple:

$$\begin{aligned} xy' + y &= y^2 \ln x \\ y^{-2} xy' + y^{-1} &= \ln x \quad \text{(E)} \end{aligned}$$

c'est une équation de Bernoulli, alors on fait le changement: $z = y^{-1}$ d'où

$$z' = -\frac{y'}{y^2}$$

En remplaçant dans l'équation (E), on obtient

$$z' - \frac{1}{x}z = -\frac{\ln x}{x}$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec seconde membre.

La résolution de l'équation sans seconde membre

$$z' - \frac{1}{x}z = 0$$

donne

$$z\ (x) = c\ x \quad \text{où} \quad c \in \mathbb{R}$$

Par suite, en utilisant la méthode de la variation de la constante, on obtient pour $c\,(x)$, l'équation

$$c'\,(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$$

En intégrant par partie, on trouve:

$$c\ (x) = \frac{1}{x}\ln x + \frac{1}{x} + k \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{R}$$

Ainsi la solution générale de l'équation linéaire est donnée par

$$z\ (x) = \left(\frac{1}{x}\ln x + \frac{1}{x} + k\right)x$$

et puisque $z = y^{-1}$ alors la solution générale de (E) est

$$y\ (x) = \frac{1}{\ln x + kx + 1} \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{R}$$

E-Équation de riccati

elle est de la forme:

$$y' = a\ (x)\, y^2 + b\,(x)\ y + c\ (x) \qquad (x \in I)\ \text{ où } \alpha \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

où $a\ (x)$, $b\ (x)$ et $c\ (x)$ sont trois fonctions continues sur un intervalle I.

On ne peut la résoudre que si on en connaît a priori une solution particulière y_1.on pose alors $y = y_1 + z$, z étant une nouvelle fonction inconnue, d'où

$$(1) \Leftrightarrow z' = a\ (x)\, z^2 + d\ (x)\ z$$

C'est une équation de Bernoulli qui se ramène à une équation linéaire en posant $\frac{1}{z} = u$.

Exemple

$$\left(x^3 - 1\right) y' = y^2 + x^2 y - 2x.$$

4.2 Équations différentielles d'ordre 2 à coefficients consantes

Une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants est une équation de la forme

$$ay'' + by' + cy = f\,(x) \qquad (1^*)$$

où a, b et c sont des constantes réelles, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie et continue dans un intervalle I de $\mathbb{R}$.

L'équation (1^*) est dite une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants avec second membre ($f\,(x)$). A lors pour résoudre l'équation (1^*) il faut suivre les deux étapes suivantes:

1ère étape: la résolution de (1^*) sans second membre:

Soit l'équation

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (2^*)$$

Comme remarque la résolution des équations linéaires sans seconde membre donne toujours une seule solution y_1, par contre pour les équation de type (2^*) on trouve deux solutions y_1 et y_2.

En effet pour résoudre (2^*) il faut trouver au premier lieu une équation équivalente à (2^*) dite équation caractéristique associée à (2^*) en remplace $y^{(n)}$ par r^n.

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad (3^*)$$

Par suite on calcul le $\triangle$ et on trouve l'un des cas suivants

Le signe de $\triangle$	les solutions de (3^*)	Les solutions de (2^*)
$\triangle > 0$	deus solutions réelles r_1 et r_2	$y_1 + y_2 = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} = c_1 z_1 + c_2 z_2$
$\triangle = 0$	une racine double r_0	$y_1 + y_2 = (c_1 x + c_2) e^{r_0 x} = c_1 z_1 + c_2 z_2$
$\triangle < 0$	deus solutions complexes r_1 et r_2 avec $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_1 = \alpha + i\beta$	$y_1 + y_2 = c_1 \cos \beta x e^{\alpha x} + c_2 \sin \beta x e^{\alpha x}$ $= c_1 z_1 + c_2 z_2$

2ème étape: la résolution de (1^*) avec second membre:

Il reste à trouver la troisième solution de l'équation (1^*), pour cela on peut appliquer l'un des deux méthodes suivantes:

1ère Méthode: Méthode de la solution particulière.

On peut utiliser cette méthode dans le cas où le second membre est l'un des fonctions suivantes: polynôme, sinus, cosinus, exponentielle, ou somme ou produit entre ces quatre fonctions. D'où les régles suivantes:

Le type du seconde membre	La solution particulière
polynôme	polynôme
sinus	contient le cosinus ainsi que le sinus
cosinus	contient le cosinus ainsi que le sinus
exponentielle	exponentielle

2ème Méthode: Méthode de la variation de la constante.

On remarque que chaque solution de l'équation sans seconde membre est de la forme: $c_1 z_1 + c_2 z_2$, alors la recherche de la solution de l'équation avec seconde membre par cette méthode est de la forme $y_3 = c_1(x) z_1 + c_2(x) z_2$ où $c_1(x)$, $c_2(x)$ sont des fonctions inconnues, dérivables vérifiant la condition supplémentaire

$$c_1'(x)\, z_1 + c_2'(x)\, z_2 = 0$$

On utilise le fait que y_3 est une solution de (1^*) on obtient l'équation

$$c_1'(x)\, z_1' + c_2'(x)\, z_2' = f(x)$$

D'où le système

$$\begin{cases} c_1'(x)\, z_1 + c_2'(x)\, z_2 = 0 \\ c_1'(x)\, z_1' + c_2'(x)\, z_2' = f(x) \end{cases}$$

ce qui permet de trouver $c_1'(x)$ et $c_2'(x)$. Par intégration on trouve $c_1(x)$ et $c_2(x)$, ce qui donne le y_3.

Conclusion: La solution générale est:

$$Y = y_1 + y_2 + y_3$$

4.3 Exercice

Exercice 01: Résoudre les équations suivantes:

$$(1) \quad x\, y' \ln x = (3\ln x + 1)\, y$$
$$(2)\ \ y' = x\ \tan y \qquad (3)\ x^2\ y' = x^2 + y^2 - x\ y$$
$$(4)\ (\text{supp}) \quad (\tan y)\, xy' + \left(2x^2 - 1\right) = 0, (5)\ (\text{supp}\ )\ \left(1 + x^2\right)^2 y' + 2x + 2x\ y^2 = 0$$
$$(6)\ \ (\text{supp}\ )\ \ x\ y' - y = x\ \left(1 - e^{-\frac{y}{x}}\right)$$

Exercice 02: Résoudre les équations suivantes:

$$(1) \quad y' + y = \cos x + \sin x \qquad (2)\ \ y' - \tfrac{1}{x}\ y = \tfrac{x}{1+x^2}$$
$$(3)\ \textbf{(supp)} \quad y' + (\tan x)\ \ y = \tfrac{1}{\cos x} \qquad (4)\ \ \textbf{(supp)}\ \ \ x\ y' +\ y = \arctan x$$

Exercice 03: Résoudre les équations suivantes:

$$\begin{aligned} y^{"} - 5\,y^{'} + 6\,y &= x^2 + e^{3x} \quad \text{(par la méthode de la variation de la constante).} \\ y^{"} - y^{'} + y &= \sin x \quad \text{(la solution particulière)} \\ y^{"} + 2\,y^{'} + y &= xe^{-x} \quad \text{(par la méthode de la variation de la constante).} \end{aligned}$$

Exercice 04:(supp) Résoudre les équations suivantes:

$$x\,y^{'} + y = x\,y^3$$

$$3y^{'} \cos x - y \sin x - y^4 = 0$$

$$x^2 \left(y^{'} + y^2 \right) = xy - 1 \text{ sachant que } \tfrac{1}{x} \text{ est une solution particulière.}$$

Exercice 05: (supp) Résoudre les équations suivantes:

$$\begin{aligned} y^{"} - 6\,y^{'} + 6\,y &= (x+1)\ e^{3x} \quad \text{(par la méthode de la variation de la constante).} \\ y^{"} - y^{'} + y &= x \sin x \quad \text{(par la méthode de la variation de la constante).} \\ y^{"} + 2\,y^{'} + y &= x^2 + \sin x e^{-3x} \quad \text{(la solution particulière)} \end{aligned}$$

4.4 Le corrigé des éxercices

Exercice 01: Résoudre les équations suivantes:

(1) $x\,y^{'} \ln x = (3 \ln x + 1)\, y$

(2) $y^{'} = x\ \tan y$ (3) $x^2\ y^{'} = x^2 + y^2 - x\ y$

(4) (supp) $(\tan y)\, xy^{'} + \left(2x^2 - 1\right) = 0$, (5) (supp) $\left(1 + x^2\right)^2 y' + 2x + 2x\ y^2 = 0$

(6) (supp) $x\ y^{'} - y = x\ \left(1 - e^{-\frac{y}{x}}\right)$

Solution:

$$(1)\qquad x\ y^{'}\ln x = (3\ln x+1)\,y \Leftrightarrow x\frac{dy}{dx}\ln x=(3\ln x+1)\,y$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{y}=\frac{3\ln x+1}{x\ln x}dx \text{ , c'est une équation à variables séparables}$$

$$\Leftrightarrow \int\frac{dy}{y}=\int\frac{3}{x}dx+\frac{1}{x\ln x}dx$$

$$\Leftrightarrow \ln|y|=3\ln|x|+\ln|\ln|x||+c,c\in\mathbb{R}^*$$

$$\Leftrightarrow |y|=e^c|x|^3\ln|x|\Leftrightarrow y=k|x|^3\ln|x|\,,k\in\mathbb{R}$$

$$(2)\ y^{'} = x\ \tan y \quad\Leftrightarrow\frac{dy}{\tan y}=xdx\Leftrightarrow\frac{\cos y}{\sin y}dy=xdx\Leftrightarrow\ln|\sin x|=\frac{x^2}{2}+c$$

$$\Leftrightarrow\quad|\sin x|=e^ce^{\frac{x^2}{2}}\Leftrightarrow x=\arcsin\left(ke^{\frac{x^2}{2}}\right),k\in\mathbb{R}\text{ et }-1\leq ke^{\frac{x^2}{2}}\leq 1.$$

$$(3)\,x^2\ y^{'}=x^2+y^2-x\ y\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=1+\left(\frac{y}{x}\right)^2-\frac{y}{x}\text{ c'est une équation homogène.}$$

on pose $\quad:\quad t=\dfrac{y}{x}\Rightarrow y=t\ x\Rightarrow y\ '=t\ 'x+t$

$$\Rightarrow\quad t\ 'x+t=1+t^2-t$$

$$\Rightarrow\quad\frac{dt}{dx}x=1+t^2-2t\Rightarrow\frac{dt}{1+t^2-2t}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{dt}{(1-t)^2}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow\quad\frac{1}{1-t}=\ln|x|+c,c\in\mathbb{R}\Leftrightarrow t=1-\frac{1}{\ln|x|+c},c\in\mathbb{R}.$$

Exercice 02: Résoudre les équations suivantes:

(1) $y^{'}+y=\cos x+\sin x$ (2) $y^{'}-\frac{1}{x}\ y=\frac{x}{1+x^2}$

(3) **(supp)** $y^{'}+(\tan x)\ y=\frac{1}{\cos x}$ (4) **(supp)** $x\ y^{'}+\ y=\arctan x$

$$(1)\quad y^{'}+y=\cos x+\sin x$$

$1^{ére}$- étape: La solution de l'équation sans seconde membre.

$$
\begin{aligned}
y' + y &= 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \\
&\Rightarrow \frac{dy}{y} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int dx \\
&\Rightarrow \ln|y| = -x + c, c \in \mathbb{R} \\
y_1 &= k\ e^{-x}, k \in \mathbb{R} \text{ solution de l'équation sans seconde membre.}
\end{aligned}
$$

$2^{ème}$- étape: La solution de l'équation avec seconde membre.

$$y' - y = \cos x + \sin x \ \ (1)$$

par la méthode de la solution particulière:

$$
\begin{aligned}
y_2 &= c_1 \cos x + c_2 \sin x \ \ \text{est une solution particulière de} (1)\,. \\
&\Rightarrow y_2' + y_2 = \cos x + \sin x \\
&\Rightarrow -c_1 \sin x + c_2 \cos x \ + c_1 \cos x + c_2 \sin x = \cos x + \sin x \\
&\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 + c_2 = 1 \end{array} \right. \Rightarrow c_2 = 1 \text{ et } c_1 = 0 \Rightarrow y_2 = \sin x
\end{aligned}
$$

conclusion: la solution générale est définie par:

$$y = k\ e^{-x} + \sin x, k \in \mathbb{R}.$$

$$y^{'} - \frac{1}{x}\ y = \frac{x}{1+x^2}$$

$1^{ére}$- étape: La solution de l'équation sans seconde membre.

$$
\begin{aligned}
y' - \frac{1}{x} y &= 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \\
&\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \\
&\Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + c, c \in \mathbb{R} \\
y_1 &= k\ x\ , k \in \mathbb{R} \text{ solution de l'équation sans seconde membre.}
\end{aligned}
$$

$2^{ème}$- étape: La solution de l'équation avec seconde membre.

$$y^{'} - \frac{1}{x}\ y = \frac{x}{1+x^2}.\ (1)$$

par la méthode de la variation de la constante:

$$\begin{aligned}
y_2 &= k(x)\ x \text{ est une solution particulière de } (1)\,. \\
&\Rightarrow y_2' - \frac{1}{x}y_2 = \frac{x}{1+x^2} \\
&\Rightarrow k\,'(x)\ x\ + k(x)\ x\ - k(x)\ x = \frac{x}{1+x^2} \\
&\Rightarrow k\,'(x) = \frac{1}{1+x^2} \\
&\Rightarrow \int k\,'(x)\,dx = \int\ \frac{1}{1+x^2}dx \Rightarrow k(x) = \ \arctan x \\
&\Rightarrow y_2 = x\ \arctan x
\end{aligned}$$

conclusion: la solution générale est définie par:

$$y = y_1 = k\ x + x\ \arctan x\ , k \in \mathbb{R}.$$

Exercice 03: Résoudre les équations suivantes:

$$\begin{aligned}
y^{"} - 5\ y^{'} + 6\ y &= x^2 + e^{3x} \quad \text{(par la méthode de la variation de la constante).} \\
y^{"} -\ y^{'} +\ y &= \sin x \quad \text{(la solution particulière)} \\
y^{"} + 2\ y^{'} +\ y &= xe^{-x} \quad \text{(par la méthode de la variation de la constante).}
\end{aligned}$$

$$y^{"} - 5\ y^{'} + 6\ y = x^2 + e^{3x} \quad \text{(par la méthode de la variation de la constante).}$$

$1^{ére}$- étape: La solution de l'équation sans seconde membre.

$$\begin{aligned} y'' - 5\,y' + 6\,y &= 0 \quad (5) \\ \text{l'équation caractéristique est donnée par} &: \; r^2 - 5r + 6 = 0 \Rightarrow \triangle = 1 \\ &\Rightarrow \; r_1 = 2 \text{ et } r_2 = \; 3 \\ \text{d'où la solution de (5) est définie par} &: \; y_1 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$2^{ème}$- étape: La solution de l'équation avec seconde membre. (2points)

1ére méthode: la méthode de la solution particulière:

$$\begin{aligned} y_2 &= ax^2 + bx + c, \quad \text{est une solution de (4)} \\ &\Rightarrow \; y_2'' - 2\,y_2' + \; y_2 = x^2 + 1 \\ &\Rightarrow \; (2a) - 2\,(2ax + b) + \left(ax^2 + bx + c\right) = x^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} a = 1 \\ b - 4a = 0 \\ c - 2b + 2a = 1 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \{a = 1, b = 4 \text{ et } c = 7$$

$$\Rightarrow \; y_2 = x^2 + 4x + 7$$

2ème méthode: la méthode de la variation de la constante:

$$\begin{aligned}
y_2 &= \left(c_1(x)\ x + c_2(x)\right)e^x \text{ est une solution de } (4) \\
&\Rightarrow {y_2}'' - 2\ {y_2}' + \ y_2 = x^2 + 1 \\
&\Rightarrow \begin{cases} \left(c_1'(x)\ x + c_2'(x)\right)e^x = 0 \\ c_1'(x)\ xe^x + c_1'(x)\ e^x + c_2'(x)\,e^x = x^2 + 1 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} c_1'(x) = \left(x^2+1\right)e^{-x} \\ c_2'(x) = \left(-x - x^3\right)e^{-x} \end{cases} \\
\text{des intégrations par parties} \quad &: \quad \Rightarrow \begin{cases} c_1(x) = \left[-3 - 2x - x^2\right]e^{-x} \\ c_2(x) = \left[x^3 + 3x^2 + 7x + 6\right]e^{-x} \end{cases} \\
&\Rightarrow y_2 = x^2 + 4x + 7
\end{aligned}$$

Partie I

Espaces vectoriels

4.5 Introduction:

Sur les vecteurs, au sens de la géométrie élémentaire, c'est-à-dire tels qu'on les rencontre en physique élémentaire, on a pu définir deux types d'opération : l'addition et la multiplication par un réel. Dans ce chapitre, nous allons généraliser ces notions en leur donnant une portée plus abstraite, donc plus vaste.

4.6 Définition d'un espace vectoriel

On dit qu'un ensemble E est un **espace vectoriel** (ou possède une structure d'espace vectoriel) sur un corps commutatif $\Bbbk$ (le plus souvent $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) si on peut définir sur les éléments de E (appelés **vecteur**) deux opérations, ou lois de composition:

4.6.1 L'addition: (notée $+$)

Cette opération interne fait de $(E,+)$ un groupe abélien.

4.6.2 Une opération externe, la multiplication par un élément de $\Bbbk$

Cette loi externe (produit noté αu) possédant les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned}
\forall\alpha,\ \beta &\in \Bbbk,\ \forall u, v \in E : \\
\alpha\,(u+v) &= \alpha u + \alpha v \quad \text{(distributivité sur } E\text{)} \\
(\alpha+\beta)\,u &= \alpha u + \beta u \quad \text{(distributivité sur } \Bbbk\text{)} \\
\alpha\,(\beta u) &= (\alpha\beta)\,u \\
1.u &= u \quad \text{(1 étant l'élément unité de } \Bbbk\text{)}
\end{aligned}$$

4.7 Exemples

Les ensembles suivants possèdent des structures d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ (éventuellement $\mathbb{C}$):

l'ensemble des polynômes à une variable, de degré inférieur ou égal à n;

l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle I;

l'ensemble des suites réelles ou complexes;

par contre l'ensemble des polynômes à une variable, de degré égal à $n \in \mathbb{N}^*$ n'est plus un espace vectoriel car le polynôme nul (l'élément neutre) n'est plus de degré n.

4.8 Propriétés immédiates des opérations dans un espace vectoriel

Des axiomes de définition, il résulte:

1) $\forall u \in E$, $0.u = 0_E$.(0_E est l'élément neutre de E).

2) $\forall \alpha \in \Bbbk, \alpha.0_E = 0_E$.

3) $\forall \alpha \in \Bbbk, \forall u \in E, \alpha.u = 0_E \Longrightarrow \alpha = 0$ ou $u = 0_E$.

4) $\forall u \in E, (-1)\, u = -u$.

5) $\forall (\alpha, \beta) \in \Bbbk^2 \quad \forall u \in E - \{0_E\} \quad \alpha u = \beta u \Rightarrow \alpha = \beta$.

6) $\forall \alpha \in \Bbbk^* \quad \forall (u, v) \in E^2 \qquad \alpha u = \alpha v \Rightarrow u = v$.

4.9 Sous -espaces vectoriels

On appelle **sous-espace vectoriel (**on note **s.e.v)**d'un espace vectoriel E, sur un corps $\Bbbk$, toute partie de E qui possède la structure d'espace vectoriel sur $\Bbbk$. Pour qu'une partie non vide F d'un espace vectoriel E soit un sous-espace de E, il faut et il suffit que toute combinaison de deux vecteurs de F soit un vecteur de F, c'est à dire:

$$\begin{aligned} 1) \quad F &\neq \varnothing \\ 2)\ \forall u, v &\in F, u + v \in F \\ 3) \forall \alpha &\in \Bbbk, \forall u \in F, \alpha u \in F \end{aligned}$$

On note:

$$F \underset{sev}{\subset} E$$

4.9.1 Exemples

1) l'ensemble des suites convergentes est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles ou complexes.

2) $A = \{(x, y, z)\,; x = y = z\}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$.

3) $B = \{(x, y, 1)\}$ n'est pas un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ car $(x, y, 1) \in B$ mais $3\,(x, y, 1) = (3x, 3y, 3) \notin B$.

Proposition 4 *Si F est un s.e.v de E alors il contient l'élément neutre de E.*

Preuve: *F est un s.e.v de $E \Rightarrow F \neq \varnothing \Rightarrow \exists u \in F \Rightarrow$ si $\alpha = 0$ alors d'après* 3) $0_E \in F$. ■

Remarques:

0 est l'élément neutre de $\mathbb{R}$.

$(0, 0)$ est l'élément neutre de $\mathbb{R}^2$.

$(0, 0, 0)$ est l'élément neutre de $\mathbb{R}^3$.

Le polynôme nul est l'élément neutre de l'ensemble des polynômes.

La fonction nulle est l'élément neutre de l'ensemble des fonctions.

Donc d'après la proposition pour montrer que $F \neq \varnothing$ c'est pratique de voir l'élément neutre par exemple $O_E \notin F \Rightarrow F$ n'est pas un s.e.v de E.

4.10 Intersection et la réunion de deux sous-espaces

-L'intersection de deux sous-espaces vectoriels (et donc d'un nombre fini) de E est un s.e.v de E.

En effet: soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E alors:

1) $0_E \in F$ et $0_E \in G \Rightarrow 0_E \in F \cap G \Rightarrow F \cap G \neq \varnothing$.

2) $\forall u, v \in F \cap G \Rightarrow u \in F, v \in F$ et $u \in G, v \in G \Rightarrow u + v \in F$ et $u + v \in G$ car F et G sont tous les deux des s.e.v de $E \Rightarrow u + v \in F \cap G$.

3) $\forall \alpha \in \mathbb{k}, \forall u \in F \cap G \Rightarrow u \in F$ et $u \in G \Rightarrow \alpha u \in F$ et $\alpha u \in G \Rightarrow \alpha u \in F \cap G$.

Conclusion: $F \cap G$ est un s.e.v de E.

-Par contre la réunion de deux sous-espaces vectoriels de E n'est plus un s.e.v de E.En effet:

Exemple1: Soient $A = \{(x,0), x \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(0,y), y \in \mathbb{R}\}$ deux s.e.v de $\mathbb{R}^2$car par exemple pour l'ensemble A on a:

1) $(0,0) \in A \Rightarrow A \neq \varnothing$.

2) $\forall u, v \in A \Rightarrow u = (a,0), v = (b,0) \Rightarrow u + v = (a+b,0) \in A$.

3) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in A \Rightarrow u = (a,0) \Rightarrow \alpha u = (\alpha a, 0) \in A$.

Conclusion: A est un s.e.v de $\mathbb{R}^2$.

de même pour l'ensemble B.

Alors $u = (1,0) \in A \subset A \cup B$ et $v = (0,2) \in B \subset A \cup B$ mais $u+v = (1,2) \notin A \cup B \Rightarrow A \cup B$ n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^2$.

Exemple2: Soient $E = \{2k, k \in \mathbb{Z}\}$ et $F = \{3k, k \in \mathbb{Z}\}$ deux s.e.v de $\mathbb{Z}$ car par exemple pour l'ensemble E on a:

1) $0 \in E \Rightarrow E \neq \varnothing$.

2) $\forall u, v \in E \Rightarrow u = 2k, v = 2k' \Rightarrow u + v = 2(k + k') \in E$.

3) $\forall \alpha \in \mathbb{Z}, \forall u \in E \Rightarrow u = 2k \Rightarrow \alpha u = 2(\alpha K) \in E$.

Conclusion: E est un s.e.v de $\mathbb{Z}$.

de même pour l'ensemble F.

Alors $u = 2 \in E \subset E \cup F$ et $v = 3 \in F \subset E \cup F$ mais $u + v = 5 \notin E \cup F \Rightarrow$

$E \cup F$ n'est pas un s.e.v de $\mathbb{Z}$.

4.11 Somme des sous-espaces. Somme directe

4.11.1 Somme des sous-espaces

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors la somme de F et G est défine par:

$$F + G = \{u \in E \text{ tel que } u = u_1 + u_2 \text{ avec } u_1 \in F \text{ et } u_2 \in G\}$$

4.11.2 Somme directe (Espaces supplémentaires)

On dit que la somme $F+G$ est **directe**, ou encore que F et G sont supplémentaires vis-à-vis de E, si la décomposition $u = u_1 + u_2$ d'un élément quelconque de E en somme de deux éléments de F et G est unique. Et on note:

$$E = F \oplus G,$$

autrement on a:

$$E = F \oplus G \Leftrightarrow \begin{cases} E = F + G \\ \text{et} \\ F \cap G = \{0_E\}. \end{cases}$$

Exemple: Dans $\mathbb{R}^3$les deux s.e.v suivants:

$$F = \{(x, y, z)\,; x = y = z\} \text{ et } G = \{(x, y, 0)\,; x, y \in \mathbb{R}\}$$

sont supplémentaires ($\mathbb{R}^3 = F \oplus G$). En effet:

$$\begin{aligned}
a) \text{ On a: } \quad \mathbb{R}^3 &= \; F + G \text{ car} \\
1)\ F &\subset \; \mathbb{R}^3 \text{ et } G \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow F + G \subset \mathbb{R}^3. \\
2) \forall u &\in \; \mathbb{R}^3, u = (x, y, z) = (z, z, z) + (x - z, y - z, 0) \in F + G \Rightarrow \mathbb{R}^3 \subset F + G \\
b)\ 1) \text{ on } 0_E &\in \; F \text{ et } 0_E \in G \text{ car } F \text{ et } G \text{ sont deux s.e.v de } E \Rightarrow 0_E \in F \cap G \Rightarrow \{0_E\} \subset F \cap G. \\
2) \text{ si } u &\in \; F \cap G \Rightarrow u \in F \text{ et } u \in G \Rightarrow u = (x, x, x) \text{ et } u = (\alpha, \beta, 0) \Rightarrow \alpha = \beta = x = y = 0. \\
&\Rightarrow \; u = (0, 0, 0) \ \Rightarrow F \cap G \subset \{0_E\} \Rightarrow F \cap G = \{0_E\}.
\end{aligned}$$

4.12 Famille de vecteurs d'un espace vectoriel (Notion de la base)

4.12.1 1) Dépendance (Famille liée)

Une famille $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$des vecteurs d'un $\mathbb{k}$-espace vectoriel $(E, +, .)$ est liée ou linéairement dépendants s'il existe $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{k}$ non tous nuls tels que,

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n = 0_E.$$

Exemple:

Dans $E = \mathbb{R}_2[x]$ (l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égale à 2 et à coefficients réels), les fonctions f_1, f_2, f_3

définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par:

$$f_1(x) = x^2 + 1, f_2(x) = x^2 - 1 \text{ et } f_3(x) = x^2. \text{ sont liées.}$$

En effet: soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que:

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

d'où $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{\lambda_3}{2}$ il y a donc une infinité de solutions $\left(-\frac{\lambda_3}{2}, -\frac{\lambda_3}{2}, \lambda_3\right)$ avec λ_3 réel arbitraire par exemple:$(1, 1, -2)$.

4.12.2 2) Indépendance (famille libre)

Une famille $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$de vecteurs d'un $\mathbb{k}$-espace vectoriel $(E, +, .)$ est libre ou linéairement indépendants si pour tout $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{k}$,

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n = 0_E$$

$\Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0.$

Exemple:

Dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $A = (0, 1, 3), B = (2, 0, -1)$ et $C = (2, 0, 1)$ sont libres car:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\ \alpha A + \beta B + \gamma C = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2\beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha = 0 \\ 3\alpha - \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

4.12.3 3) Famille génératrice ou systéme générateur

Une famille de vecteurs $(a_1, a_2, ..., a_n)$ d'un $\mathbb{k}$-espace vectoriel $(E, +, .)$ est dite génératrice de E ou engendre E si tout élément u de E est combinaison linéaire de $(a_1, a_2, ..., a_n)$ c'est-à-dire:

$$\forall u \in E, \exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{k} \text{ tels que } u = \lambda_1.a_1 + \lambda_2.a_2 + ... + \lambda_n.a_n.$$

Exemple:

Dans $\mathbb{R}^2$ les deux vecteurs $u = (2, 3)$ et $v = (-1, 5)$ est une famille génératrice car:

$\forall w \in \mathbb{R}^2$ $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tel que: $w = (x, y) = \lambda_1 u + \lambda_2 v = \lambda_1 (2, 3) + \lambda_2 (-1, 5) = (2\lambda_1 - \lambda_2, 3\lambda_1 + 5\lambda_2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 = x \\ 3\lambda_1 + 5\lambda_2 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{5x+y}{13} \\ \lambda_2 = \frac{-3x+2y}{13} \end{cases} \text{ donc } (\lambda_1, \lambda_2) \text{ existe pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

4.12.4 4) Base:

Une famille de vecteurs $(a_1, a_2, ..., a_n)$ d'un $\mathbb{k}$-espace vectoriel $(E, +, .)$ est une base de E si elle est à la fois libre et génératrice.

Exemple:

Dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $u = (2, 3, 0)$, $v = (1, -1, 1)$ et $w = (-1, 3, 5)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

4.12.5 5) Dimension d'un espace vectoriel

La dimension finie n d'un espace vectoriel E, est le nombre maximum de vecteurs que peut renfemer un système libre extrait de E, et on note $\dim E = n$, par convention on pose: $\dim(\{0_E\}) = 0$. Autrement dit la dimension d'un espace vectoriel E est le nombre de vecteurs qui forment la base de E. Si le nombre des éléments d'un système libre de E n'est pas majoré, on dit que E est de dimension infinie.

Remarque: si F est un s.e.v d'un espace vectoriel E de dimension n alors:

$$F \subset E \Rightarrow \dim F \leq \dim E$$

Exemple: $\dim \mathbb{R}^2 = 2$

4.12.6 6) Rang d'un système de vecteurs

On appelle rang d'un système de p vecteurs $(u_1, u_2, ..., u_p)$ de E, avec $\dim E = n$, la dimension r du sous-espace vectoriel $(u_1, u_2, ..., u_p)$. En d'autres termes, r est le nombre maximum de vecteurs que peut comporter un système libre extrait du système donné.

4.12.7 7) Lien entre la dimension et la somme directe

Dans les espaces de dimensions finies on a la formule:

$$\dim (F + G) = \dim F + \dim G - \dim (F \cap G)$$

Dans le cas de la somme directe, $F \cap G = \{0_E\}$, donc:

$$\dim (F \oplus G) = \dim F + \dim G$$

Enfin pour montrer que de sous espaces vectoriels de dimensions finies sont supplémentaires vis-à-vis de E, c'est à dire:

$$E = F \oplus G \Leftrightarrow \begin{cases} \dim E = \dim F + \dim G \\ \quad\quad\quad \text{et} \\ \quad\quad F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$$

Exemple: Dans $\mathbb{R}^3$les deux s.e.v suivants:

$$F = \{(x, y, z)\,;\, x = y = z\} \text{ et } G = \{(x, y, 0)\,;\, x, y \in \mathbb{R}\} \text{ sont supplémentaires.}$$

En effet:

$$\begin{aligned}
\forall u &\in F, u=(x,x,x)=x\,(1,1,1) \Rightarrow \{(1,1,1)\} \text{ est une base de } F \Rightarrow \dim F = 1. \\
\forall v &\in G, v=(x,y,0)=x\,(1,0,0)+y\,(0,1,0) \Rightarrow \{(1,0,0),(0,1,0)\} \text{ engendre } G \text{ et libre c} \\
\alpha\,(1,0,0)+\beta\,(0,1,0) &= 0 \Rightarrow \alpha=\beta=0 \Rightarrow \{(1,0,0),(0,1,0)\} \text{ est une base de } G \\
&\Rightarrow \dim G = 2 \Rightarrow \dim \mathbb{R}^3 = \dim F + \dim G = 3.
\end{aligned}$$

Le reste de la preuve est déja fait.

4.13 Sous-espace engendré par un ensemble

Définition 5 *Soit A une partie d'un espace vectoriel E. On définis le sous-espace vectoriel engendré par un ensemble A, le plus petit sous-espace vectoriel contenant l'ensemble A. Et on le note: $S\,(A)$.*

Exemples:

1) si A est un s.e.v de E alors: $S\,(A) = A$.

2) $S\,(\varnothing) = \{0_E\}$.

Remarques:

$$\begin{aligned}
\dim \mathbb{R}^n &= n. \\
\dim R_n\,[x] &= n+1.
\end{aligned}$$

$$p_n\,(x) = a_0.1 + a_1.x + a_2.x^2 + ... + a_n.x^n.$$

4.14 Exercice

Exercice 01: Les sous-ensembles suivants sont-ils des s-ev de $\mathbb{R}^2$?

$$\begin{aligned}
1)\;\; A &= \left\{\left(x,x^2\right); x\in\mathbb{R}\right\} 1) \qquad 2)\; B=\{(x,ax+b)\,; x\in\mathbb{R}\}, a \text{ et } b \text{ sont des paramètres réels.} \\
3)\;\; C &= \left\{(x,y)\,; x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}\; x^2+y^2\le 1\right\}
\end{aligned}$$

Exercice 02: Soit:

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ avec: } x^2 + 2y^2 + z^2 + 2y\ \ (x+z) = 0\right\}$$

E ainsi défini est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Si oui donner sa dimension.

Exercice 03: Soient:

$$E_1 = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3; a = c\right\} \text{ et } E_2 = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3; a+b+c = 0\right\} \quad \text{et } E_3 = \{(0,0,c)\,;c \in \mathbb{R}\}\,.$$

(1) Montrer que: $E_i, i = 1,2,3$ sont des s.ev de $\mathbb{R}^3$.

(2) Montrer que:$\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$, $\mathbb{R}^3 = E_2 + E_3$ et $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_3$.

(3) Dans quel cas la somme est directe.

Exercice 04: Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les sous ensembles suivants:

$$E_1 = \left\{(a+b, b-3a, a) \in \mathbb{R}^3 /\ a,b \in \mathbb{R}\right\} \qquad \text{et } E_2 = \left\{(c,-2c,c) \in \mathbb{R}^3 /\ c \in \mathbb{R}\right\}.$$

avec E_2 est un s-ev de $\mathbb{R}^3$.

(1) Montrer que E_1 est un s-ev de $\mathbb{R}^3$.

(2) Déterminer une base B_1 de E_1 et une base B_2 de E_2.

(3) En déduire $\dim E_1$ et $\dim E_2$.

(4) Montrer que: $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$.

(5) Déduire si la somme est directe ou non.

4.15 Le corrigé

Exercice 01: Les sous-ensembles suivants sont-ils des s-ev de $\mathbb{R}^2$?

1) $A = \left\{\left(x,x^2\right); x \in \mathbb{R}\right\}$ 2) $B = \{(x, ax+b)\,; x \in \mathbb{R}\}$, a et b sont des paramètres réels.

3) $C = \left\{(x,y)\,; x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\ x^2 + y^2 \leq 1\right\}$

1) $A=\left\{\left(x,x^2\right);x\in\mathbb{R}\right\}$ n'est pas un sous espace vectoriel car $(2,4),(3,9)\in A$ mais $(2,4)+(3,9)=(5,13)\notin A$.

2) $B=\{(x,ax+b)\,;x\in\mathbb{R}\}$

1er cas: Si $b\neq 0$ on a $(0,0)\notin B$ alors B n'est pas un sous espace vectoriel car chaque s.e.v contient l'élément neutre de l'espace.

2ème cas: Si $b=0$

$B=\{(x,ax)\,;x\in\mathbb{R}\}$

a) $(0,0)\in B\Rightarrow B\neq\varnothing$

b) Si $v_1,v_2\in B\Rightarrow v_1=(x_1,ax_1)$ et $v_2=(x_2,ax_2)\Rightarrow v_1+v_2=(x_1+x_2,a\,(x_1+x_2))\in B$

c) Si $v_1\in B,\alpha\in\mathbb{R}\Rightarrow \alpha v_1=(\alpha x_1,a\,(\alpha x_1))\in B$

Alors B est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

3) $C=\left\{(x,y)\,;x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}\ x^2+y^2\leq 1\right\}$ n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^2$

Car: $(1,0)\in C$ mais $4\cdot(1,0)=(4,0)\notin C$.

Exercice 02: Soit:

$$E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \text{ avec: } x^2+2y^2+z^2+2y\ \ (x+z)=0\right\}$$

E ainsi défini est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Si oui donner sa dimension.

$x^2+2y^2+z^2+2y\ (x+z)=0\Leftrightarrow x^2+y^2+2yx+z^2+y^2+2yz=0\Leftrightarrow (x+y)^2+(y+z)^2=0\Leftrightarrow x=-y$ et $z=-y$

$\Rightarrow E=\left\{(-y,y,-y)\in\mathbb{R}^3 \text{ avec: } y\in\mathbb{R}\right\}$

1) a) $(0,0,0)\in E\Rightarrow E\neq\varnothing$

b) Si $v_1,v_2\in E\Rightarrow v_1=(-y_1,y_1,-y_1)$ et $v_2=(-y_2,y_2,-y_2)\Rightarrow v_1{+}v_2=(-\,(y_1+y_2)\,,(y_1+y_2)\,,-\,(y_1+y_2)$

E

c) Si $v\in E,\alpha\in\mathbb{R}\Rightarrow \alpha v=(-\,(\alpha y)\,,(\alpha y)\,,-\,(\alpha y))\in E$

Alors E est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

2) Si $v\in E$ alors $v=(-y,y,-y)=y\,(-1,1,-1)$ ce qui implique que le vecteur $(-1,1,-1)$ engendre E.

Puisque on a qu'un seul vecteur alors $B=\{(-1,1,-1)\}$ est une base de $E\Rightarrow\dim E=1$.

Exercice 03: Soient:

$$E_1 = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 ; a = c\right\} \text{ et } E_2 = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 ; a+b+c = 0\right\} \quad \text{et } E_3 = \left\{(0,0,c)\,; c \in \mathbb{R}\right\}.$$

(1) Montrer que: $E_i, i = 1,2,3$ sont des s.ev de $\mathbb{R}^3$.

Pour E_1 par exemple:

a) $(0,0,0) \in E_1 \Rightarrow E_1 \neq \varnothing$

b) Si $v_1, v_2 \in E_1 \Rightarrow v_1 = (x_1, y_1, x_1)$ et $v_2 = (x_2, y_2, x_2) \Rightarrow v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, (y_1 + y_2), x_1 + x_2) \in E_1$

c) Si $v \in E_1, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha v = (\alpha x, \alpha y, \alpha x) \in E_1$

Alors E_1 est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

De même pour les deux dernier cas.

(2) Montrer que: $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$, $\mathbb{R}^3 = E_2 + E_3$ et $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_3$.

a) Montrons que: $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$?

On a: $E_1 \subset \mathbb{R}^3$ et $E_2 \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow E_1 + E_2 \subset \mathbb{R}^3$

Si $v \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow v = (x,y,z) = (\alpha, \beta, \alpha) + (\delta, \theta, -\delta - \theta) = (\alpha + \delta, \beta + \theta, \alpha - \delta - \theta) \Rightarrow$

$$\begin{cases} x = \alpha + \delta \\ y = \beta + \theta \\ z = \alpha - \delta - \theta \end{cases}$$

Il suffit de prendre par exemple: $\beta = 0 \Rightarrow \theta = y \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + \delta \\ z = \alpha - \delta - y \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}(x+y+z) \Rightarrow \delta = \frac{1}{2}(x-y-z)$

D'où $v = (x,y,z) = \left(\frac{1}{2}(x+y+z), 0, \frac{1}{2}(x+y+z)\right) + \left(\frac{1}{2}(x-y-z), y, -\frac{1}{2}(x-y-z) - y\right) \in E_1 + E_2$

b) Montrons que: $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_3$?

On a: $E_1 \subset \mathbb{R}^3$ et $E_3 \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow E_1 + E_3 \subset \mathbb{R}^3$

Si $v \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow v = (x,y,z) = (x,y,x) + (0,0,z-x) \in E_1 + E_3$.

c) Montrons que: $\mathbb{R}^3 = E_2 + E_3$?

On a: $E_3 \subset \mathbb{R}^3$ et $E_2 \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow E_2 + E_3 \subset \mathbb{R}^3$

Si $v \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow v = (x, y, z) = (x, y, -x-y) + (0, 0, z+x+y) \in E_2 + E_3$.

D'où $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$, $\mathbb{R}^3 = E_2 + E_3$ et $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_3$.

(3) Dans quel cas la somme est directe.

A) Il suffit de vérifier si on a $E_1 \cap E_2 = \{(0, 0, 0)\}$?

a) $(0, 0, 0) \in E_1 \cap E_2$.

b) Si $v \in E_1 \cap E_2 \Rightarrow v \in E_1$ et $v \in E_1 \Rightarrow v = (a, b, a)$ et $v = (a, b, -a-b) \Rightarrow a = -a-b \Rightarrow b = -2a$

Donc par exemple $(1, -2, 1) \in E_1 \cap E_2 \Rightarrow E_1 \cap E_2 \neq \{(0, 0, 0)\}$

ce qui implique que la somme n'est pas directe.

B) Il suffit de vérifier si on a $E_2 \cap E_3 = \{(0, 0, 0)\}$?

a) $(0, 0, 0) \in E_2 \cap E_3$.

b) Si $v \in E_2 \cap E_3 \Rightarrow v \in E_2$ et $v \in E_3 \Rightarrow v = (a, b, -a-b)$ et $v = (0, 0, c) \Rightarrow a = b = c = 0 \Rightarrow v = (0, 0, 0)$

$\Rightarrow E_1 \cap E_2 = \{(0, 0, 0)\}$

ce qui implique que la somme est directe.

C) Il suffit de vérifier si on a $E_1 \cap E_3 = \{(0, 0, 0)\}$?

a) $(0, 0, 0) \in E_1 \cap E_3$.

b) Si $v \in E_1 \cap E_3 \Rightarrow v \in E_2$ et $v \in E_3 \Rightarrow v = (a, b, a)$ et $v = (0, 0, c) \Rightarrow a = b = c = 0 \Rightarrow v = (0, 0, 0)$

$\Rightarrow E_1 \cap E_3 = \{(0, 0, 0)\}$

ce qui implique que la somme est directe.

Exercice 04: Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les sous ensembles suivants:

$$E_1 = \left\{(a+b, b-3a, a) \in \mathbb{R}^3 / \ a, b \in \mathbb{R}\right\} \quad \text{et } E_2 = \left\{(c, -2c, c) \in \mathbb{R}^3 / \ c \in \mathbb{R}\right\}.$$

(1)(Montrons que E_1 est un s-ev de $\mathbb{R}^3$?.

a) $E_1 \neq \emptyset$?

$(0, 0, 0) \in E_1 \Rightarrow E_1 \neq \emptyset$

b) $\forall \;\; u_1, u_2 \in E_1 \Rightarrow u_1 + u_2 \in E_1?$

Soient $u_1, u_2 \in E_1 \Rightarrow u_1 = (a_1 + b_1, b_1 - 3a_1, a_1)$ et $u_2 = (a_2 + b_2, b_2 - 3a_2, a_2)$

$\Rightarrow u_1 + u_2 = ((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2), (b_1 + b_2) - 3(a_1 + a_2), (a_1 + a_2)) \in E_1$

c) $\forall \;\; u \in E_1, \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha u \in E_1?$

Soient $u \in E_1$ et $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow u = (a + b, b - 3a, a)$

$\Rightarrow \alpha u = (\alpha a + \alpha b, \alpha b - 3\alpha a, \alpha a) \in E_1$

Conclusion: E_1 est un s-ev de $\mathbb{R}^3$.

(2) Déterminons une base B_1 de E_1 et une base B_2 de E_2.

a)

$$u \in E_1 \Rightarrow u = (a + b, b - 3a, a) = a\ (1, -3, 1) + b\ (1, 1, 0)$$

alors $B_1 = \{(1, -3, 1), (1, 1, 0)\}$ engendre E_1. mais:

$$\alpha (1, -3, 1) + \beta (1, 1, 0) = (0, 0, 0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

alors les deux vecteurs de B_1 sont linéairements indépendants.

Ce qui implique que $B_1 = \{ (1, -3, 1), (1, 1, 0)\}$ est une base de E_1.

b)

$$u \in E_2 \Rightarrow u = (c, -2c, c) = c\ (1, -2, 1)$$

alors $B_2 = \{ (1, -2, 1)\}$ engendre E_2. mais:

$$\alpha (1, -2, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow \alpha = 0$$

Ce qui implique que $B_2 = \{ (1, -2, 1)\}$ est une base de E_2.

(3) En déduire $\dim E_1$ et $\dim E_2$.

$$\dim E_1 = 2 \quad \text{et} \qquad \dim E_2 = 1.$$

(4) Montrer que: $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$.

a)" $\supset$" $\quad E_1 \subset \mathbb{R}^3$ et $\quad E_2 \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow E_1 + E_2 \subset \mathbb{R}^3$.

b) "$\subset$" soit $u \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow u = (x, y, z) = (a + b, b - 3a, a) + (c, -2c, c)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = a + b + c \\ y = b - 3a - 2c \\ z = a + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = x - z \\ y = x - z - a - 2z \Rightarrow a = -y + x - 3z \\ c = z - a = z - (-y + x - 3z) = -x + y + 4z \end{cases}$$

$$\Rightarrow u = (x, y, z) = (2x - y - 4z, -2x + 3y - 8z, -y + x - 3z) +$$
$$(-x + y + 4z, -2\left(-x + y + 4z\right), -x + y + 4z)$$
$$\in E_1 + E_2 \text{ d'où: } \mathbb{R}^3 = E_1 + E_2.$$

(5) On déduire que: $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$.

(a)

$$\begin{aligned} \dim E_1 &= 2 \quad \text{et} \qquad \dim E_2 = 1 \\ &\Rightarrow \dim E_1 + \dim E_2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3 = 3 \\ \text{ou bien on a} \quad &: \quad \mathbb{R}^3 = E_1 + E_2.. \end{aligned}$$

(b) :

$$
\begin{aligned}
E_1 \cap E_2 &= \{(0,0,0)\} \text{ car: } \{(0,0,0)\} \subset E_1 \cap E_2 \\
& \quad \text{car } E_1 \text{ et } E_2 \text{ sont deux sous espaces vectoriels.} \\
\text{De plus si:} & \quad u \in E_1 \cap E_2 \Rightarrow u = (a+b, b-3a, a) \text{ et } u = (c, -2c, c) \\
&\Rightarrow \begin{cases} a+b=c \\ b-3a=-2c \\ a=c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=0 \\ c=0 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} \mathbb{R}^3 = E_1 + E_2 \\ E_1 \cap E_2 = \{(0,0,0)\} \end{cases} \text{ ou bien } \begin{cases} \dim E_1 + \dim E_2 = \dim \mathbb{R}^3 \\ E_1 \cap E_2 = \{(0,0,0)\} \end{cases} \\
& \quad \text{la somme est directe } \left(\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2\right).
\end{aligned}
$$

Partie II

Applications linéaires

4.16 Application linéaire

Définition 6 *Soient E, F deux $\mathbb{k}$-espaces vectoriels et f une application de E dans F. Alors f est linéaire, si les propriétés suivantes sont satisfaites:*

$$\begin{aligned} 1)\forall x, y &\in E \text{ on a } f(x+y) = f(x) + f(y). \\ 2)\forall x &\in E, \forall \alpha \in \mathbb{k} \text{ on a } f(\alpha x) = \alpha f(x). \end{aligned}$$

ou encore:

$$\forall x, y \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{k} \text{ on a } f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Exemple: *l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par:*

$$f(x, y, z) = (x - y, y + 2z)$$

est une application linéaire.

4.17 Noyau d'une application linéaire

Définition 7 *Soient E, F deux $\mathbb{k}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Alors pour trouver le **noyau** de f, on résout l'équation $f(x) = 0_F$.*

Ainsi:

$$\ker f = \{x \in E, f(x) = 0_F\}$$

qui est un sous-espace vectoriel de E.

Exemple: *l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par:*

$$f(x, y, z) = (x - y, y + 2z)$$

est une application linéaire. Alors le noyau de f est:

$$\ker f = \{u \in E, f(u) = 0_{\mathbb{R}^2}\}$$

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. *On a:*

$$\begin{aligned} u &\in \ker f \Leftrightarrow f\ (u) = (0,0) \Leftrightarrow (x-y, y+2z) = (0,0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ y+2z=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=y \\ z=-\frac{y}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow u = y\left(1,1,-\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

et donc $\ker f$ *est le s.e.v engendré par le vecteur* $\left(1,1,-\frac{1}{2}\right)$ *noté:*

$$\ker f = Vect\left\{\left(1,1,-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

4.18 Injectivité d'une application linéaire

Soient E, F deux $\Bbbk$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Notons que f est injective si et seulement si:

$$\forall x_1, x_2 \in E;\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f\ (x_1) \neq f\ (x_2)\,.\text{ ou bien } f\ (x_1) = f\ (x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Mais pour les applications linéaires, il suffit de montrer que: $\ker f = \{0_E\}$.

En fait on a:

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow \ker f = \{0_E\}\,.$$

Exemple:

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par:

$$f\ (x,y) = (x-y, y+x)$$

Alors f est injective car:

$$\begin{aligned} u &= (x,y) \in \ker f \Leftrightarrow f\ (u) = 0_{\mathbb{R}^2}. \Leftrightarrow (x-y, y+x) = (0,0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ y+x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=0 \end{aligned}$$

donc $\ker f = \{(0,0)\}$, et par suite f est injective.

4.19 Image d'une application linéaire

Soient E, F deux $\mathbb{k}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. L'image de f est l'ensemble de toutes les images des éléments de E par f. Ainsi:

$$\operatorname{Im} f = \{f\ (u)\, ,\, u \in E\}\, .$$

De plus si $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de E, alors $\operatorname{Im}\, f = Vect\, \{f\ (e_1)\, , f\ (e_2)\, , ..., f\ (e_n)\}$ c'est à dire le sous-espace engendré par les vecteurs $f\ (e_1)\, , f\ (e_2)\, , ..., f\ (e_n)\, .$

Exemple:

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, $B = \left(\vec{i},\, \vec{j},\, \vec{k}\right)$ une base de E et f l'endomorphisme de E défini par:

$$f\ \left(\vec{i}\right) = -\ \vec{i} +\ \vec{k},\ f\ \left(\vec{j}\right) =\ \vec{j} +\ \vec{k}\ ,\ f\ \left(\vec{k}\right) =\ \vec{i}\ + \vec{j}.$$

Alors l'image de f est définie comme suit:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= Vect\left\{f\ \left(\vec{i}\right), f\ \left(\vec{j}\right), f\ \left(\vec{k}\right)\right\} \text{ mais } f\ \left(\vec{k}\right) = f\ \left(\vec{j}\right) - f\ \left(\vec{i}\right) \\ &\Rightarrow \operatorname{Im} f = Vect\left\{f\ \left(\vec{i}\right), f\ \left(\vec{j}\right)\right\} = \left\{x\left(-\ \vec{i} +\ \vec{k}\right) + y\left(\ \vec{j} +\ \vec{k}\ \right), x, y \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

4.20 Rang d'une application linéaire

Soient E, F deux $\mathbb{k}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Le rang d'une application linéaire est la dimension de l'iimage de cette application. On a:

$$rg\ f = \dim\left(\operatorname{Im} f\right).$$

de plus si E est de dimension finie, on a le théorème du rang:

$$\dim E = rg\ f + \dim\left(\ker f\right).$$

Exemple:

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par: $f\ (x,y) = (4x-2y, 6x-3y)$. Alors on a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} f &= \{f(x,y)\,; x,y \in \mathbb{R}\} = \{(4x-2y, 6x-3y)\,; x,y \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(2x-y)(2,3)\,; x,y \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(2,3)\,; \alpha \in \mathbb{R}\} \\
&= Vect\{(2,3)\}
\end{aligned}$$

le vecteur $(2,3)$ est une base de $\operatorname{Im} f$, et par suite $rg\ f = 1$.

4.21 Endomorphisme, Isomorphisme, Automorphisme

Soient E, F deux $\mathbb{k}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F.

Si f est bijective, alors f est dite un **isomorphisme.**

Un **endomorphisme** de E est une application linéaire de E dans E.

Un **automorphisme** est une isomorphisme de E dans E.

Exemple:

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par: $f\ (x,y) = (x-y, x+y)$. Alors f est un automorphisme.

4.22 Projecteur

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{k}-$espace vectoriel. On dira que f est un projecteur, si l'on a:

$$\begin{aligned}
f \circ f &= f \\
\text{ou bien } &: \operatorname{Im} f \text{ et } \ker f \text{ sont supplémentaires et que: } \forall x \in \operatorname{Im} f\ , f\ (x) = x.
\end{aligned}$$

On dira que f est la projection sur $\operatorname{Im} f$ parallèlement à $\ker f$.

Exemple:

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par: $f\ (x,y) = (4x-2y, 6x-3y)$. Alors on a :

$$\begin{aligned}(f \circ f)(u) &= f(f(u)) = f(x,y) = f(4x-2y, 6x-3y) \\ &= (4x-2y, 6x-3y) = f(u)\end{aligned}$$

et par suite f est un projecteur.

4.23 Symétrie

Soit f un endomorphisme d'un $\Bbbk-$espace vectoriel. On dira que f est une symétrie, si l'on a:

$$\begin{aligned} f \circ f &= Id_E \\ \text{ou bien} \quad &: \ker(f - Id_E) \text{ et } \ker(f + Id_E) \text{ sont supplémentaires .}\end{aligned}$$

On dira que f est la symétrie de E par rapport à $\ker(f - Id_E)$et parallèlement à $\ker(f + Id_E)$.

Exemple:

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par: $f(x,y) = (y,x)$. Alors on a :

$$(f \circ f)(u) = f(f(u)) = f(y,x) = (x,y)$$

et par suite f est une symétrie.

4.24 Exercice

Exercice 01:

(1) On considère les applications suivantes définies de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Lesquelles sont linéaires?

a) $f : (x,y) \mapsto (x+2y, 2x-y)$;

b) $g : (x,y) \mapsto (x+2y, 2x-y+1)$;

c) $h : (x,y) \mapsto (x+y, 2xy)$;

d) $k : (x,y) \mapsto \left(x+y, x-y^2\right)$.

(2) Soit f l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par: $f(P) = P(1)$;

montrer que f est une application linéaire. ($\mathbb{R}[X]$: est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et dans le cas général $\mathbb{R}_n[X]$: est l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n et à coefficients réels).

Exercice 02:

(1) Trouver les noyaux des applications linéaires suivantes:

a) $f(x, y) = (4x - 3y, 5x + 4y)$.

b) $g(x, y) = (6x - 4y, 9x - 6y)$.

(2) La même question pour les applications de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définies par:

a) $h(x, y, z) = (x + y + z, y, z)$.

b) $k(x, y, z) = (y + z, x + y + z, x)$.

Exercice 03:

(1) Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par:

$$f(x, y, z) = (x - 2y, x + y + 2z)$$

f est-elle injective?

(2) La même question pour les applications de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définies ci-dessous:

a) $h(x, y, z) = (x + y + z, y, z)$.

b) $k(x, y, z) = (y + z, x + y + z, x)$.

Exercice 04:

(1) Déterminer les images des applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ suivantes:

a) $f(x, y) = (4x - 3y, 5x + 4y)$.

b) $g(x, y) = (6x - 4y, 9x - 6y)$.

(2) Soit f l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ définie par: $f(P) = P + (1-X)P'$.

Déterminer l'image de cette application linéaire.

Exercice 05:

(1) Soit E un espace vectoriel de dimension 3 dont $\left(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ est une base. On considère l'endomorphisme f de E défini par:

$$f\left(\vec{i}\right) = -\vec{i} + 2\vec{k},\ f\left(\vec{j}\right) = \vec{j} + 2\vec{k}, f\left(\vec{k}\right) = 2\,\vec{i} + 2\,\vec{j}.$$

Déterminer le rang de f.

(2) Soit E_3 le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, et soit f l'application définie sur E_3 par:

$$f(P) = X^2\ P'' - 4X\ P' + 6P.$$

Déterminer le rang de f.

Exercice 06: Le plan vectoriel V_2 étant rapporté à une base $\left(\vec{i},\ \vec{j}\right)$, on considère l'application linéaire de V_2 dans V_2 définie par:

$$f\left(\vec{i}\right) = \frac{1}{2}\,\vec{i} - \frac{1}{4}\,\vec{j},\ f\left(\vec{j}\right) = -\vec{i} + \frac{1}{2}\,\vec{j}.$$

(1) Démontrer que f est un projecteur.

(2) Déterminer l'image et le noyau de f.

(3) Vérifier que $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$ sont supplémentaires dans V_2 et que:

$$\forall x \in \operatorname{Im} f,\ f(x) = x.$$

Exercice 07: Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, (e_1, e_2) une base de E et f l'endomorphisme de E défini par:

$$f(e_1) = 2e_1 - e_2, f(e_2) = 3e_1 - 2e_2.$$

(1) Démontrer que f est une symétrie.

Notation 8 ***Lemme 1*** ***Lemme 4.1*** *Trouver* $E_1 = \ker(f - Id_E)$ *et* $E_2 = \ker(f + Id_E)$.

Chapitre 5

Les Matrices

Le but de ce chapitre est de trouver un moyen pour résoudre un système de n équation où n est un entier naturel assez grand, c'est la notion des matrices.

Dans le cas général on repésente une matrice M par:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}$$

qu'on peut la simplifier par:

$$M = \begin{pmatrix} & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ . & . & . & a_{ij} & . & . & . \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \end{pmatrix} \in M_{m,n}$$

où $M_{m,n}$ est l'ensemble des matrices qui contient m lignes et n colonnes, de plus chaques a_{ij} represente le coefficient de la matrice M qui se trouve dans la $i-ème$ ligne et la $j-ème$ colonne. Dans le cas où $i=j$, les a_{ii} sont les éléments de la diagonale de M.

5.1 Matrices associées à une application linéaire dans le cas des espaces de dimensions finies.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions fines avec: $\dim E = n$ et $\dim F = m$. Choisissons dans E une base B_E, dans F une base B_F définies par:

$$\begin{aligned} B_E &= (e_1, e_2, ..., e_n) \\ B_F &= (f_1, f_2, ..., f_m) \end{aligned}$$

Soit φ une application linéaire de E dans F. Alors la matrice associée à φ par rapport à B_E et B_F qu'on note $M(\varphi, B_E, B_F)$ est obtenue comme suit:

la $i-ème$ colonne de $M(\varphi, B_E, B_F)$ représente les coordonnées de $\varphi(e_i)$ dans la base $B_F = f_1, f_2, ..., f_m$, en effet:

$$M(\varphi, B_E, B_F) = \begin{array}{cc} \varphi(e_1)\,\varphi(e_2)\,.......\varphi(e_n) & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ . \\ . \\ . \\ f_m \end{array} \end{array}$$

car:

$$\begin{aligned}
\varphi(e_1) &= a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + ... + a_{m1}f_m \\
\varphi(e_2) &= a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + ... + a_{m2}f_m \\
&... \\
\varphi(e_n) &= a_{1n}f_1 + a_{2n}f_2 + ... + a_{mn}f_m
\end{aligned}$$

Exemple 5.1 *Soitφl'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ qui à (x, y, z) associe $(x - 2y + z, 2x + y + 3z)$, alors la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$est:*

$$M = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \varphi(e_1) & \varphi(e_1) & \varphi(e_1) \end{array} & \end{array}$$

car:

$$\begin{aligned}
e_1 &= (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1), f_1 = (1,0) \ \ et \ f_2 = (0,1) \\
de \ plus \ &: \ \varphi(e_1) = (1,2) = \mathbf{1}.f_1 + \mathbf{2}.f_2 \ ,\varphi(e_2) = (-2,1) = -\mathbf{2}.f_1 + \mathbf{1}.f_2 \\
et \ \varphi(e_3) &= (1,3) = \mathbf{1}.f_1 + \mathbf{3}.f_2.
\end{aligned}$$

5.2 Propriétés des matrices:

Soit M une matrice définie par:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}$$

1- Une matrice est nulle si $\forall (i,j), a_{ij} = 0$ avec $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$ de plus c'est la matrice associée à l'application nulle $(\forall u \in E, \varphi(u) = 0_F)$.

2- Deux matrices A et B sont égales si: $a_{ij} = b_{ij}$ avec $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$ avec les a_{ij} (resp. b_{ij}) représentent les coefficients de A (resp. B).

3- La matrice unité notée I est la matrice dont les $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $a_{ij} = 1$ si $i = j$.

4- Le transposée d'une matrice A noté ${}^tA$ est la matrice dont les lignes sont les colonnes de A et les colonnes sont les lignes de A.

5- Une matrice est dite triangulaire supérieure (resp. inférieure) si: $a_{ij} = 0$ si $i > j$ (resp. $a_{ij} = 0$ si $i < j$).

6- Une matrice diagonale est une matrice qui est à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure dont les éléments de la diagonales s'appelles les pivots.

Exemple 5.2 *Si:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^t A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

De plus on a: ${}^t\left({}^tA\right) = A$.

5.3 Opérations sur les matrices

Soient A et B deux matrices définies par:

$$A = \begin{pmatrix} & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ . & . & . & a_{ij} & . & . & . \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \end{pmatrix} \in M_{m,n}$$

$$\text{et } B = \begin{pmatrix} & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ . & . & . & b_{ij} & . & . & . \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \end{pmatrix} \in M_{k,l}$$

1- La somme de ces deux matrices est définie si: $m = k$ et $n = l$ et elle est donnée par:

$$A + B = \begin{pmatrix} & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ . & . & . & a_{ij} + b_{ij} & . & . & . \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \end{pmatrix} \in M_{m,n}$$

Exemple 5.3

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} \; et\; B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$alors \quad : \quad A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 7 & 7 & 7 \\ 14 & 14 & 14 \end{pmatrix}.$$

2- Le produit d'une matrice A par un scalaire λ avec:

$$A = \begin{pmatrix} & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ . & . & . & a_{ij} & . & . & . \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \end{pmatrix} \in M_{m,n}$$

est la matrice:

$$\lambda A = A = \begin{pmatrix} & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ . & . & . & \lambda a_{ij} & . & . & . \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \end{pmatrix} \in M_{m,n}$$

Exemple 5.4 *Si:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 4 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & 5\lambda \\ 4\lambda & 6\lambda & 2\lambda \\ 3\lambda & \lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

De plus on a: ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ et ${}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA$.

3- La multiplication de deux matrices A et B définie par:

$$A = \begin{pmatrix} & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ . & . & . & a_{ij} & . & . & . \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \end{pmatrix} \in M_{m,n}$$

$$\text{et } B = \begin{pmatrix} & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ . & . & . & b_{ij} & . & . & . \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \end{pmatrix} \in M_{k,l}$$

est possible c'est-à-dire: $A \cdot B$ si $n = k$ autrement dit le nombre de colonnes de la première matrice A est égale le nombre de lignes de la deuxième matrice B.

Alors on a:

$$A \cdot B = C = \begin{pmatrix} & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ . & . & . & c_{ij} & . & . & . \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \end{pmatrix} \in M_{m,l}$$

c'est-à-dire le nombre de lignes de la matrice C est le nombre de lignes de A et le nombre de colonnes de C est le nombre de colonnes de B, avec chaque c_{ij} est la multiplication de la i^{ème}

ligne de A par la $j^{ème}$ colonne de B mais terme à terme d'où:

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + ... + a_{im}b_{mj} \\ &= \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}. \end{aligned}$$

Exemple 5.5 *Si:*

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3,3} \ et\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,2} \\ \Rightarrow \quad & A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 16 & 17 \\ 15 & 12 \end{pmatrix} \in M_{3,2}. \end{aligned}$$

Et on a: ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$ et dans le cas général la multiplication n'est pas permutative ($A \cdot B \neq B \cdot A$) car des fois $A \cdot B$ existe mais $B \cdot A$ n'existe pas.

5.4 Inverse d'une matrice carrée

On peut représenter un système d'équation sous la forme matricielle d'où:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{2n}x_n = y_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n = y_n \end{cases} \Leftrightarrow AX = Y$$

avec:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Alors pour chercher X il suffit d'inverser la matrice A et on a:

$$AX = Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y \text{ car: } A \cdot A^{-1} = I.$$

Pour cela les deux questions qui doit se poser sont l'existence et la méthode de la recherche de l'inverse de la matrice carrée A noté A^{-1}.

Dans un premier pas si A est la matrice associée à une application φ alors:

$$A \text{ inversible} \Leftrightarrow \ker(\varphi) = \{0_E\} \Leftrightarrow \ker(A) = \{0_E\}.$$

ou bien:

$$\begin{aligned} A \text{ inversible} &\Leftrightarrow \text{ les vecteurs colonnes de } A \text{ sont indépendants} \\ &\Leftrightarrow \text{ les vecteurs lignes de } A \text{ sont indépendants.} \end{aligned}$$

De plus on a:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \text{ et } \left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right).$$

5.4.1 Inversion d'une matrice par la méthode de GAUSS

Pour déterminer l'inverse de la matrice A par la méthode de GAUSS il suffit d'appliquer des combinaisons linéaires simultanément à A et I qui transforment A en I et I en A^{-1}.

Exemple 5.6 *Calculer l'inverse de la matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

En effet:

Le type d'opération sur la ligne (L)	$A \rightarrow$			$I \rightarrow$		
	1	2	1	1	0	0
	3	1	2	0	1	0
	-1	4	2	0	0	1
L_1	1	2	1	1	0	0
$L_2 - \left(\frac{3}{1}\right) L_1$	0	-5	-1	-3	$\frac{2}{5}$	0
$L_3 - \left(\frac{-1}{1}\right) L_1$	0	6	3	1	0	1
$L_1 - \left(\frac{2}{-5}\right) L_2$	1	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{-1}{5}$	$\frac{4}{25}$	0
L_2	0	-5	-1	-3	$\frac{2}{5}$	0
$L_3 - \left(\frac{6}{-5}\right) L_2$	0	0	$\frac{9}{5}$	$\frac{-13}{5}$	$\frac{12}{25}$	1
$L_1 - \left(\frac{\frac{3}{5}}{\frac{9}{5}}\right) L_3$	1	0	0	$\frac{-16}{15}$	0	$\frac{-1}{3}$
$L_2 - \left(\frac{-1}{\frac{9}{5}}\right) L_3$	0	-5	0	$\frac{-58}{15}$	$\frac{14}{25}$	$\frac{1}{3}$
L_3	0	0	$\frac{9}{5}$	$\frac{-13}{5}$	$\frac{12}{25}$	1
$\frac{L_1}{1}$	1	0	0	$\frac{-16}{15}$	0	$\frac{-1}{3}$
$\frac{L_2}{-5}$	0	1	0	$\frac{58}{75}$	$-\frac{14}{125}$	$-\frac{1}{15}$
$\frac{L_3}{\frac{9}{5}}$	0	0	1	$\frac{-13}{9}$	$\frac{12}{45}$	$\frac{5}{9}$

d'où: $\uparrow$ I

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-16}{15} & 0 & \frac{-1}{3} \\ \frac{58}{75} & -\frac{14}{125} & -\frac{1}{15} \\ \frac{-13}{9} & \frac{12}{45} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$$

Alors le principe est de rendre les constantes qui se trouvent en dehors de la diagonale est égales à zéro colonne par colonne, donc pour la constante 3 qui se trouve dans la deuxième ligne et la première colonne on a l'opération:

$$L_2 - \left(\frac{3}{1}\right) L_1$$

la ligne ou se trouve la constante moins la constante sur le pivot (a_{11}) fois la ligne du pivot

donc dans la première étape on élimine les deux constantes de la première colonne en utilisant le premier pivot, par contre dans la deuxième étape on élimine les deux constantes de la deuxième colonne en utilisant le deuxième pivot, dans la troisième étape on élimine les deux constantes de la troisième colonne en utilisant le troisième pivot, et dans chaque cas on utilise l'étape l'avant dernière. Finalement pour trouver I il suffit de diviser chaque ligne sur la constante qui se trouve dans la ligne.

5.4.2 Inversion d'une matrice par la notion du déterminant:

Les déterminants:

Le déterminant d'ordre 2:

Si A est une matrice d'ordre 2 définie par:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Alors le déterminant de A noté det A=$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ est donné par la formule: $ad - cb$.

Le déterminant d'ordre 3:

Si A est une matrice d'ordre 3 définie par:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Alors le déterminant de A noté det A= $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ est donné par la formule: $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{11}a_{22}a_{33}$

$-a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{22}a_{33}$.

On peut obtenir ce développement par deux méthodes:

1- La règle de SARRUS:

Si det A= $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ alors la règle de SARRUS consiste à répéter, au-dessous du tableau précédent, les deux premières lignes, et à affecter du signe + les produits obtenus parallèlement à la diagonale principale $\begin{vmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{vmatrix}$, du signe - ceux obtenus parallèlement à la diagonale non principale $\begin{vmatrix} & & a_{13} \\ & a_{22} & \\ a_{31} & & \end{vmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

2- Le développement d'un déterminant suivant une rangée:

Dans le cas général c'est-à-dire: $A \in M_{n,n}$ on a:

$$A = \begin{pmatrix} & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ . & . & . & a_{ij} & . & . & . \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \triangle = \begin{vmatrix} & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ . & . & . & a_{ij} & . & . & . \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \end{vmatrix}$$

Donc chaque déterminant d'ordre n est donné par une somme de n déterminant d'ordre $n-1$, et il peut donc être développé de $2n$ façons suivant une de ses rangées, sous la forme:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ X_{ij} \qquad \text{développement suivant la ligne } i.$$

ou bien:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\ Y_{ij} \qquad \text{développement suivant la colonne } j.$$

avec:

$$X_{ij} = (-1)^{i+j} \triangle_{ij} \quad \text{, qui est le cofacteur de } a_{ij}.$$

$\triangle_{ij}$ étant le mineur de a_{ij}, déterminant d'ordre $n-1$ obenu en supprimant dans $\triangle$ la ligne et la colonne contenant a_{ij}.

La répartition des signes à prendre devant les mineurs est alternée à partir du signe + de a_{11}, par exemple un déterminant d'ordre 6:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & + & - \\ - & + & - & + & - & + \\ + & - & + & - & + & - \\ - & + & - & + & - & + \\ + & - & + & - & + & - \\ - & + & - & + & - & + \end{vmatrix}.$$

Exemple 5.7 *Calculer le déterminant de*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

c'est un développement suivant la première colonne.

$$= 2 - 8 - 12 + 12 - 4 + 1 = -9.$$

Remarque 5.1 *Dans l'étape l'avant dernière de la méthode GAUSS. A est sous la forme diagonale* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{5} \end{pmatrix}$

donc on trouve le même résultat $\det A = -9$ *on multipliant les éléments de la diagonale.*

3- **Propriétés des déterminants:**

$$A \text{ est dite singulière si et seulement si } \det A = 0$$

$$A \text{ est dite régilière si et seulement si } \det A \neq 0$$

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A), \det\left({}^t A\right) = \det A \text{ }, \det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

$$\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A) \text{ et } \det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Inversion d'une matrice

Pour qu'une matrice A est inversible il suffit que: $\det A \neq 0$ de plus on a:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times^t (\text{com } A)$$

avec (com A) est la comatrice de A obtenue en remplaçant chaque élément de A par son cofacteur (X_{ij} =$(-1)^{i+j} \triangle_{ij}$, est le cofacteur de a_{ij}).

Exemple 5.8 (1) *Dans le cas d'ordre 2:*

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Exemple 5.9 (2) *Soit la matrice:*

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \textit{ d'après les calculs qu'on fait:} \det A = 9 \\ com\ A &= \begin{pmatrix} -6 & -8 & 13 \\ 0 & 3 & -6 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow^{t} comA = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 3 \\ -8 & 3 & 1 \\ 13 & -6 & -5 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \ A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot^{t} (com\ A) = \begin{pmatrix} \frac{-6}{9} & 0 & \frac{3}{9} \\ \frac{-8}{9} & \frac{3}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{13}{9} & \frac{-6}{9} & \frac{-5}{9} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5.5 Changement de base. Matrices semblables:

Soit, dans un espace vectoriel E de dimension n, deux bases:

$$B = (e_1, e_2, ..., e_n) \text{ et } B' = \left(e_1', e_2', ..., e_n'\right)$$

On veut étudier le lien entre les coordonnées d'un vecteur u de E dans les deux bases B et B' en utilisant les propriétés des matrices.

Si les vecteurs e_j' sont définies dans la base B par la formule: $e_j' = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i$, alors la matrice de passage de la base B à la base B'

est donnée par:

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & . & . & . & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & . & . & . & \alpha_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & . & . & . & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Alors si on pose:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } X' = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$$

les deux matrices d'un vecteur u dans B et B'. D'où les résultats suivants:

$$X = P \cdot X' \text{ ou bien } X' = P^{-1} \cdot X$$

Exemple 5.10 *Soit l'espace* $\mathbb{R}^3$ *muni de deux bases:*

$$B = (e_1, e_2, e_3) \ \ et\ B' = \left(e_1', e_2', e_3'\right)$$

avec:

$$e_1 = (1,0,0)\,, e_2 = (0,1,0)\,, e_3 = (0,0,1)\,, e_1' = (2,3,0)\,, e_2' = (1,-1,1) \ \ et\ e_3' = (-1,3,5)$$

$\Rightarrow$

$$P = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} e_1' & e_2' & e_3' \end{array} & \end{array} \text{ (c'est la matrice de passage de } B \text{ à } B'.$$

car par exemple: $e_1' = (2 \cdot e_1) + (3 \cdot e_2) + (0 \cdot e_3)$, *alors il suffit de poser les vecteurs* e_1', e_2', e_3' *sous la forme vertical.*

Alors si le vesteur $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ *dans la base* $B \Rightarrow$ *dans* $B', X_1' = P^{-1}X_1$.

Et si le vecteur $X\ _2' = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ *dans la base* $B' \Rightarrow$ *dans* $B, X_2 = PX_2'$.

En effet:

$$\det P = 2\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -34$$

$$et \quad : \quad comA = \begin{pmatrix} -8 & -15 & -3 \\ -6 & 10 & -2 \\ 0 & -9 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow^t comA = \begin{pmatrix} -8 & -6 & 0 \\ -15 & 10 & -9 \\ -3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{34}\begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 \\ 15 & -10 & 9 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Alors:

$$X_1' = P^{-1}X_1 = \frac{1}{34}\begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 \\ 15 & -10 & 9 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{38}{34} \\ \frac{28}{34} \\ \frac{48}{34} \end{pmatrix}$$

et:

$$X_2 = PX_2' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 22 \end{pmatrix}$$

5.6 La matrice associée dans un changement de base:

Dans un endomorphisme:

Soit A_1 la matrice associée à un endomorphisme f dans la base B_1. Alors la matrice associée à f dans un changement de base B_2

est donnée par la formule:

$$A_2 = P^{-1} \cdot A_1 \cdot P$$

où P est la matrice de passage de la base B_1 à la base B_2.

1. **Exemple 5.11** *On considère l'application linéaire définie par:*

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & f\ (x, y, z) = (2x - y + z, 3x - y - 3z, 3x + y + z) \end{array}$$

(1) Déterminer la matrice M associée à f relativement a la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(2) Soient $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$ avec $u_1 = (2, -1, -2)$, $u_2 = (1, 0, -1)$ et $u_3 = (3, 1, 2)$.

a) Trouver la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base B_1.

b) Trouver la matrice de passage Q de la base B_1 à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

c) Si V est de composante $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique, déterminer alors les composantes de V dans la base B_1.

d) Trouver la matrice N associée à f relativement a la base B_1 .

Solution:

(1) La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est: $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ avec $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$

alors:

$$\begin{aligned} f\ (e_1) &= f\ (1,0,0) = (2,3,3) \\ f\ (e_2) &= f\ (0,1,0) = (-1,-1,1) \\ f\ (e_3) &= f\ (0,0,1) = (1,-3,1) \end{aligned}$$

ce qui implique que:

$$M = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_1) & f(e_1) \end{array} \end{array}$$

(2) Soient $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$ avec $u_1 = (2,-1,-2)$, $u_2 = (1,0,-1)$ et $u_3 = (3,1,2)$.

a) la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base B_1.

$$P = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \end{array}$$

b) la matrice de passage Q de la base B_1 à la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$$Q = P^{-1} = \frac{1}{\det P} \cdot^t (\text{com}P)$$

$$\begin{aligned}
\text{suivant la } 2^{\text{ème}} \text{ ligne on a} \quad &: \quad \det P = -(-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\
&= \quad 5
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\text{com}P &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -5 & 10 & 0 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix} \\
{}^{t}(\text{com}P) &= \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & 10 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 2 & -1 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

c) Si $V_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique, déterminons alors les composantes de V_{B_1} dans la base B_1.

$$\begin{aligned}
V_{B_1} &= Q \cdot V_B \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 2 & -1 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ -5 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

d) Trouvons la matrice N associée à f relativement a la base B_1.

$$\begin{aligned}
\text{on a:} \quad N &= Q \cdot M \cdot P \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 2 & -1 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 2 & -1 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 13 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 12 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dans une application linéaire définie de E dans F:

Soit A_1 la matrice associée à une application linéaire f définie de E muni d'une base B_1 dans F qui est muni de la base B_2.

Alors après le changement de base dans E par B_1' et dans F par B_2'. On a les deux matrices de passages de B_1 vers B_1' qu'on

la note par P et de B_2 vers B_2' notée Q Alors la matrice associée à f dans ces changements de bases

est donnée par la formule:

$$A_2 = Q^{-1} \cdot A_1 \cdot P$$

1. **Exemple 5.12** *On considère l'application linéaire définie par:*

$$\begin{aligned}
f \quad &: \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\
(x, y, z) \quad &\mapsto \quad f\ (x, y, z) = (2x - y + z, 3x - y - z)
\end{aligned}$$

(1) Déterminer la matrice M_1 associée à f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

(2) Soient $B_1' = \{u_1', u_2', u_3'\}$ une base de $\mathbb{R}^3$ avec $u_1' = (2, -1, -2)$, $u_2' = (1, 0, -1)$ et $u_3' =$

$(3,1,2)$

et $B_2' = \{e_1', e_2'\}$ avec $e_1' = (1,3)$ et $e_2' = (2,5)$ une base de $\mathbb{R}^2$.

a) Trouver la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base B_1'.

b) Trouver la matrice de passage Q de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à la base B_2'.

c) Trouver la matrice de passage P^{-1} de la base B_1' à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

d) Trouver la matrice de passage Q^{-1} de la base B_2' à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

e) Si V_1 est de composante $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique, déterminer alors les composantes de V_1 dans la base B_1'.

f) Si V_2 est de composante $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ dans la base B_2', déterminer alors les composantes de V_2 dans la base canonique .

g) Trouver la matrice M_2 associée à f relativement aux bases B_1' et B_2' .

Remarque 5.2 *Dans le cas d'une matrice diagonale ou une matrice triangulaire le déterminant est le produit des éléments de la diagonale.*

5.6.1 Rang d'une matrice:

Soit $A \in M_{n,m}$ une matrice à n lignes et p colonnes, alors le rang de cette matrice est le nombre maximal des vecteurs colonnes extraits de A qui sont linéairements indépendants ou bien l'ordre du déterminant non nul d'ordre le plus élevé, extrait de A, noté $rangA$.

Exemple 5.13 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 8 & 14 \end{pmatrix}$$

Les quatre déterminants d'ordre 3 extraits de A sont nuls, par contre le déterminant d'ordre 2 extrait $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ *n'est pas nul,* $rangA = 2$.

5.6.2 Système d'équations linéaires-Système de CRAMER:

On appelle système de n équations linéaires à n inconnues sur le corps $\mathbb{k}$ (généralement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), un système de la forme:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{2n}x_n = y_2 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n = y_n \end{array}\right. \Leftrightarrow AX = Y$$

avec:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Alors pour chercher X il suffit d'inverser la matrice A si l'inverse existe et on a:

$$AX = Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y \text{ car: } A \cdot A^{-1} = I.$$

et on a:

$$x_i = \frac{\triangle_i}{\triangle} ......(1)$$

où $\triangle$ est le déterminant de la matrice A et $\triangle_i$ est le déterminant déduit de $\triangle$ par remplacement de la colonne de rang i (celle des coefficients de x_i de notre système) par la colonne des seconds membres y_i. Les formules (1) s'appelllent formules de Cramer.

Ces formule sont fondamentales et permettent de calculer une des inconnues du système sans faire intervenir les autres avec un $\triangle$ non nul.

Remarque 5.3 *Le rang de la matrice A est le rang du système linéaire associé.*

Exemple 5.14 *Calculer y dans le système:*

$$\begin{cases} 2x - 3y + z + 2t = 4 \\ 2x - y + 2z + t = 0 \\ 5x - 4y + z + 2t = 2 \\ x - 3y + 7z - t = 6 \end{cases}$$

5.6.3 Les valeurs propres, vecteurs propres, sous espace propre:

On appelle valeur propre et vecteur propre assiocié d'un endomorphisme f d'un espace E, un scalaire λ et un vecteur u non nul tels que:

$$f\ \ (u) = \lambda u$$

L'ensemble des vecteurs propres assiociés à une valeur propre λ de f auquel on ajoute le vecteur nul 0_E est un sous-espace de E, égale à:

$$\ker (f - \lambda I)$$

et appelé sous-espace propre de f associé à λ.

D'autre part si A est la matrice associée à f dans une base quelconque de E? alors les valeurs propres de f sont les racines de l'équation:

$$\varphi (\lambda) = \det (A - \lambda I) = 0$$

appelée équation caractéristique de f; $\varphi (\lambda)$ est le polynôme caractéristique de f.

Les vecteurs propres sont les v tels que:

$$Av = \lambda v$$

Proposition 9 *Tout endomorphismed'un espace vectoriel E de dimension n admet n valeurs propres, réelles ou complexes, distinctes ou confondues. Leur somme est égale à latrace de la matrice Ade f, leur produit est égal au déterminant de A.*

Proposition 10 *Pour qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie soit diagonalisable, il faut et il suffit que les valeurs propres sont distinctes ou bien chaque sous-espace propre de f ait pour dimension l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante.*

Et on la forme diagonale donnée par:

$$D = P^{-1}AP$$

avec P est la matrice des vecteurs propres.

Remarque 5.4 *La diagonalisation permet de calculer des puissances successives d'une matrice A, par la formule:*

$$D = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PDP^{-1} \Rightarrow A^n = PD^nP^{-1}$$

Exemple 5.15 *Diagonaliser les matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} i & -1 & -i & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -i & -1 & i & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5.6.4 Application de la diagonalisation dans la résolution d'un système d'équations différentielles du premier ordre:

Soit le système d'équations différentielles du premier ordre à coefficients constants:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n + b_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{2n}x_n + b_2 \\ \qquad\qquad .... \\ \frac{dx_3}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n + b_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dX}{dt} = AX + B \Leftrightarrow \frac{dY}{dt} = DY + C$$

avec

$$X = PY, B = PC, D = P^{-1}AP$$

D est la matrice diagonale associée à A, P étant la matrice de passage de A à D (la matrice des vecteurs propres).

Exemple 5.16 *Résoudre le système:*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 3y + t^2 \\ \frac{dy}{dt} = x + 4y + t \end{cases}$$

5.7 Exercice:

Exercice 01: On considère l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par:

$$f\ \ (x, y, z) = (2x - 6z, y + 5z, x - 3z)$$

(1) Montrer que f est une application linéaire.

(2) trouver le noyau de f $\ (\ker f)$.

(3) Déduire $\dim(\ker f)$ et $\dim(\operatorname{Im} f)$.

Exercice 02: Répondre par vrai ou faux et justifier votre réponse:

1) $A^2 = I \Rightarrow A = \pm I$ 2) $A^2 = 0 \Rightarrow A = 0$ 3) $A^2 = A \Rightarrow A = I$ ou $A = 0$.

4) supp A diagonale $\Rightarrow A \cdot B = B \cdot A$ 5) supp $A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow A \cdot^t B =^t B \cdot A$

6) supp $A \cdot B = B \cdot A$ et A^{-1}existe$\Rightarrow A^{-1} \cdot B = B \cdot A^{-1}$

Exercice 03: Soit A une matrice carrée

1) Montrer que: si $A^4 = 0$ alors $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$. Dans ce cas $(I + A)$ est-elle inversible?

Si oui donner son inverse.

2) Supp: Montrer que: si $A^{n+1} = 0$ alors $(I - A)^{-1} = I + A + \cdots + A^n$. Dans ce cas $(I + A)$ est-elle inversible?

Si oui donner son inverse.

Exercice 04: **1)** Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ par la méthode de GAUSS et par la notion de la comatrice.

2) Déterminer le rang de la matrice suivante:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 8 & 14 \end{pmatrix}$$

Exercice 05: On considère l'application linéaire définie par:

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & f\ (x, y) = (2x - y, 3x - 5y) \end{array}$$

(1) Trouver la matrice M associée à f relativement à la base canonique B de $\mathbb{R}^2$.

(2) Soit $B_1 = \{u_1, u_2\}$ une base de $\mathbb{R}^2$ avec $u_1 = (2, -1)$, $u_2 = (5, 3)$.

a) Trouver la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à la base B_1.

b) Trouver la matrice de passage Q de la base B_1 à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

c) Si V_1 est de composante $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ dans la base canonique, déterminer alors les composantes de V dans la base B_1.

d) Déduire la matrice N associée à f relativement à la base B_1.

Exercice 05: On considère l'application linéaire définie par:

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & f\ (x, y, z) = (2x - y + z, 3x - y - z, 4x + y + z) \end{array}$$

(1) Trouver la matrice M associée à f relativement à la base canonique B de $\mathbb{R}^3$.

(2) Soit $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$ avec $u_1 = (2, -1, -2)$, $u_2 = (1, 0, -1)$ et $u_3 = (3, 1, 2)$.

a) Trouver la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base B_1.

b) Si V est de composante $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique, déterminer alors les composantes de V dans la base B_1.

c) Trouver la matrice N associée à f relativement à la base B_1.

Exercice 06: On considère l'application linéaire définie par:

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \quad &\mapsto \quad f\ (x, y) = (x, y, x + y) \end{aligned}$$

Soient $B_2 = \{e_1, e_2\}$ et $B_3 = \{u_1, u_2, u_3\}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

(1) Donner la matrice M associée à f relativement aux bases B_2 et B_3.

(2) Soient $C_2 = \{v_1, v_2\}$ une base de $\mathbb{R}^2$ avec $v_1 = (1, 1)$, $v_2 = (-1, 0)$ et $C_3 = \{w_1, w_2, w_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$

avec $w_1 = (0, 1, 3)$, $w_2 = (-1, 0, 1)$ et $w_3 = (-2, -1, 0)$.

a) Trouver la matrice de passage P de la base B_2 à la base C_2.

b) Déterminer la matrice de passage Q de la base B_3 à la base C_3.

c) Si V est de composante $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans la base B_3, déterminer alors les composantes de V dans la base C_3.

d) Trouver la matrice N associée à f relativeme

Bibliographie

[1] Élie Azoulay - J. Avignant - G.Auliac, Les mathématiques en licence Cours et exercices résolus (1ère année Tome 1), 3ème édition, éd Editionce,2003.

[2] A.Bodin, Bibliothèque d'exercices version 4, octobre 2003.

[3] A. El Kaabouchi, Le succés en ALGÈBRE en fiches-méthodes 1ère année, éd. Ellipses, 2002.

[4] M. R. Spiegel, Variable complexe cours et problèmes 640 exercices résolus / série shaum, Mc GRAW-HILL BOOK COMPAGNY. 1981.