Université Abou Bakr Belkaïd Tlemcen
Faculté des Sciences
Tronc Commun SM

A.U. 2019-2020
Module : Math 2

TD.N°2 : Calcul Intégral

Exercice 1.

I) Calculer à l'aide d'une primitive

1) $\int_2^4 \frac{1}{x+1}dx$, 2) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx$, 3) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, 4) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$,

5) $\int_1^2 \frac{1}{2\sqrt{s}}ds$, 6) $\int_0^{\frac{1}{a}} \frac{1}{ax+b}dx$, $(a \neq 0)$, 7) $\int_0^{2\pi} \cos(\omega t+\varphi)dt$.

II) Calculer par intégration directe ou par transformations élémentaires

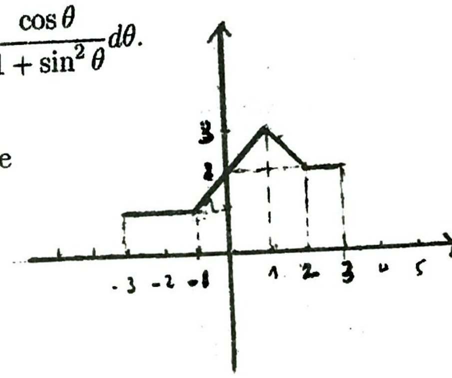
$\left(\int \frac{f'}{f}, \int \frac{f'}{1+f^2}, \int f'.f^{\alpha}, \int f'.e^{f}\right)$,

1) $\int(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})dx$, 2) $\int \sqrt[4]{(x-1)^3}dx$, 3) $\int \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}dx$, 4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos t}{t+\sin t}dt$,

5) $\int(as+b)^n ds$, $(a \neq 0, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}^*)$, 6) $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{x}{1+2x^2}dx$, 7) $\int \frac{u}{u+1}du$,

8) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \sin x dx$, 9) $\int e^{\sin^2 t}\sin 2t dt$, 10) $\int \frac{1}{\cosh s}ds$, 11) $\int \frac{\cos\theta}{1+\sin^2\theta}d\theta$.

Exercice 2.



1) Déterminer l'aire du domaine défini par la représentation ci-contre
($u.a = 1cm^2$, unité d'aire)
Partager le domaine en un rectangle, un triangle,
un trapèze, un carré,
2) Déterminer l'aire du domaine délimité par le triangle
de sommets $A(1,0)$; $B(4,0)$; $C(4,5)$.
3) Déterminer l'aire du domaine délimité par le trapèze de sommets
$D(2,0)$; $E(5,0)$; $F(5,4)$ et $G(2,3)$.
4) Vérifier les résultats obtenus dans 1), 2), 3) en utilisant les intégrales définies.
Ind dans 1) $\int_{-3}^{3} = \int_{-3}^{1} + \int_{-1}^{1} + \int_{1}^{2} + \int_{2}^{3}$.

Exercice 3.

1) Vérifier que $F(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$ est une primitive de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,

puis calculer $\int_0^1 f(x)dx$ et $\int_0^1 xf(x)dx$.

2) Calculer $\int_0^2 (|x-1|+x)dx$ et calculer $\int_{-1}^{1}\left(\frac{f(x)+x^2-1}{2}\right)dx$, sachant que $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \pi$.

Exercice 4.

I) Calculer en utilisant le changement de variable indiqué

1) $\displaystyle\int (1+x^3)^4 x^2 dx$, $(t = 1+x^3)$, 2) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$, $(t = e^x - 1 \ ou \ t = e^x)$,

3) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} x^3 \ln x dx$, $(t = \ln x)$, 4) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx$, $(t = \sin x)$,

5) $\displaystyle\int_1^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx$, $(t = \cos x)$, 6) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$, $(x = \tan t,\ \cos^2 t = \dfrac{1+\cos 2t}{2})$.

II) Calculer par parties

1) $\displaystyle\int_0^1 x \arctan x dx$, 2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}dx$, 3) $\displaystyle\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx$, (Ind : Chgt de variable, $t = \sqrt{x}$ + pp),

4) $\displaystyle\int e^{-2x}\cos^2 x dx$, 5) $\displaystyle\int_0^1 \ln(s+\sqrt{1+s^2})ds$, 6) $\displaystyle\int_0^x t \ln t dt$, 7) $\displaystyle\int_1^{e^x} \sin(\ln t)dt$, (2 fois pp).

Exercice 5.

Calculer

$$\int \frac{1}{4-9x^2}dx,\quad \int \frac{1}{4+9x^2}dx,\quad \int \frac{1}{x^2+x-2}dx,\quad \int \frac{1}{4x^2+4x+1}dx,\quad \int \frac{1}{x^2+2x+2}dx,$$

$$\int \cos^4 x \sin^3 x dx,\quad \int \sin^2 x \cos^4 x dx,\quad \int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx,\quad \int \frac{2x^2+1}{(x-1)^2(x+2)}dx,\quad \int \frac{1}{x^3+1}dx,$$

$$\int \frac{x^4-x^3+x^2}{x^3-x^2+x-1}dx,\ \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{4t^2}{t^4-1}dt,\ \int \frac{1}{1+\sin x - \cos x}dx,\ \int \frac{1}{5+4\cos x}dx,\ \int \frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}dx.$$

Exercice 6.

I) Montrer que pour $a > 0$,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx & si\ f\ est\ pair, \\ 0 & si\ f\ est\ impair. \end{cases}$$

II) Application : Calculer

1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{1+\sin^2 x}dx$, 2) $\displaystyle\int_{-1}^{+1} x \arctan x dx$, 3) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2t}{\cos^2 t}dt$, 4) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$.

Exercice 7.

1) Posons $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}dx$, $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}dx$.

Calculer $I + J$ et $I - J$ et en déduire les valeurs de I et J.

2) On se propose de calculer l'intégrale $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan x}dx$ de deux manières.

i) Calculer K en exprimant $\tan x$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.

ii) Calculer K en posant $t = \tan x$.

Exercice 8.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$.

1) Montrer que $I_n = J_n$, (Poser dans I_n, $x = \frac{\pi}{2} - t$).

2) Montrer que $\forall n \geq 2$, $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. (Ind : int par parties $\sin^n x = \sin^{n-1} x . \sin x$).

3) En déduire I_{2n} et J_{2n+1}.

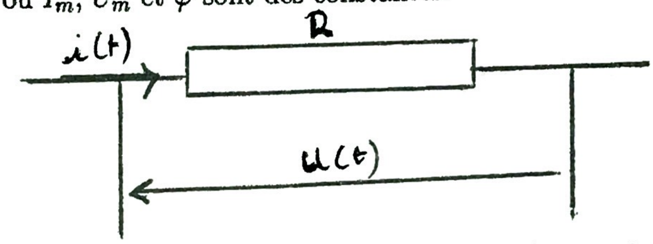
APPLICATIONS DES INTEGRALES :

Exercice 9.
Soit $V_0 > 0$ une constante. Une voiture roule à une vitesse de $V(t) = V_0 t(1-t)\ km \setminus h$, durant l'intervalle de temps : $0 \leq t \leq \frac{3}{4}h$.
1) Quelle est sa vitesse maximale ?
2) Quelle distance a-t-elle parcourue ?
3) Quelle est sa vitesse moyenne ?

Exercice 10.
La terre parcourt durant l'année une orbite elliptique (ellipse) d'équation :
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, avec $a = 1,496.10^{11}m$, $b = 1,4958.10^{11}m$.
1) Calculer la surface de l'orbite (ellipse).
2) Quel serait le rayon d'une orbite circulaire de même surface ?

Exercice 11.
Soit $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $R > 0$.
1) Calculer $S = 2\int_{-R}^{R} f(x)dx$, $\quad L = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$, (poser $x = R\sin t$),
$\sigma = 2\pi \int_{-R}^{R} f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$, $\quad V = \pi \int_{-R}^{R} (f(x))^2 dx$.
2) Que représentent les valeurs de S, L, σ et V ?

Exercice 12.
Un circuit électrique est parcouru par un courant alternatif sinusoïdal :
$i(t) = I_m \sin \omega t$, (Période $T = \frac{2\pi}{\omega}$).
La différence de potentiel aux bornes d'un dipôle (résistor de résitance R) est de la forme :
$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$ où I_m, U_m et φ sont des constantes.



1) Déterminer la valeur moyenne $\bar{i}(t)$ de $i(t)$ sur une alternance (demi-période)
$\bar{i}(t) = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} i(t)dt$.
2) Exprimer la quantité q transportée par le courant électrique d'intensité $i(t)$ sur une alternance $q = \int_0^{T/2} i(t)dt$.
3) Calculer l'énergie ω dissipée dans le dipôle traversé par $i(t)$ sur une période $\omega = \int_0^T Ri^2(t)dt$.
4) Déterminer pendant cette même période la puissance moyenne $\overline{P}(t)$ aux bornes de dipôle
$\overline{P}(t) = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt$ où $P(t) = u(t)i(t)$.