Université Abou Bakr Belkaïd Tlemcen A.U. 2019-2020
Faculté des Sciences Module : Math 2
Tronc Commun SM

TD.N°1 : Formules de Taylor et développements limités

Exercice 1.
1) En utilisant la formule de Mac-Laurin à l'ordre 1 et 2.
Montrer que : $\forall x > 0,\ x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
En déduire que $0.095 < \ln\left(\frac{11}{10}\right) < 0.1$
2) On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$.
i) En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, montrer l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{(n+1)!} < e - U_n < \frac{3}{(n+1)!}.$$

ii) Déterminer une valeur approchée de e avec une erreur ≤ 0.005.
3) En utilisant la formule de Taylor-Young de $f(x) = \cos x$ à l'ordre 4, calculer $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

Exercice 2.
1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\varepsilon(x)$ où ε est une fonction satisfaisant $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.
i) Donner l'expression exacte de ε (Utiliser $\sum_{k=0}^{n} q^k,\ q \neq 1$).
2) En déduire $DL_4(0)$ de $f_1(x) = \frac{1}{1+x}$, $f_2(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
3) Déterminer $DL_5(0)$ de $g(x) = \ln(1+x)$ et $h(x) = \arctan x$.
4) Calculer $\lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan x - x}{x^3}$ et $\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$, $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.
1) Déterminer $DL_3(0)$ des fonctions suivantes.
i) $f_1(x) = \sin x - x\ln(1+x)$, ii) $f_2(x) = \frac{x}{e^x - 1}$, iii) $f_3(x) = e^{\frac{x}{cos x}}$.
2) Déterminer $DL_n(x_0)$ des fonctions suivantes.
i) $f_1(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, $n = 3$, $x_0 = 1$; ii) $f_2(x) = x^x$, $n = 2$, $x_0 = 2$; iii) $f_3(x) = e^{\frac{x+1}{x^2}}$, $n = 3$, $x_0 = +\infty$.

Exercice 4.
En utilisant les développements limités, calculer :
1) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$, 2) $\lim_{x\to 0} \frac{3^x - 2^x}{x}$, 3) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$, 4) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$.

Exercice 5.
Soit $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$.
1) Déterminer $DL_3(0)$ de f.
2) Déterminer l'équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ en $x_0 = 0$.
3) Prouver que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ traverse la tangente $(\mathcal{T})$ en $x_0 = 0$. Un tel point est appeelé point d'inflexion.

Exercice 6.
Soit $f(x) = e^{2x}(x-1)+1$.
1) Déterminer $DL_3(0)$ de f.
2) En déduire l'équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ en $x_0 = 0$.
3) Etudier la position de la tangente $(\mathcal{T})$ par rapport à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au $\mathcal{V}(0)$.

Exercice 7.
Soit $f(x) = x\big(\ln(2x+1) - \ln x\big)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
Déterminer l'asymptote au $\mathcal{V}(+\infty)$ et la position de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à l'asymptote.

Exercice 8.
Soit $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{x-1}{x^2}}}$.
1) Déterminer l'asymptote au $\mathcal{V}(\pm\infty)$ et la position de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à l'asymptote.
2) Déterminer l'équation de la tangente $(\mathcal{T})$ en $x_0 = 1$ et la position de la courbe par rapport à la tangente $(\mathcal{T})$.