Université Aboubekr Belkaid-Tlemcen
Module: Mathématiques 1 Série de TD 03- Les applications.
1ère Année Sciences et technologies " Le corrigé"

Exercice 01: Soient f et g deux applications définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que:

$$f(x) = 2x + 5 \text{ et } g(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

(1) g est- elle injective? surjective?

g n'est pas injective car: $-1 \neq 1$ et $g(-1) = g(1)$.
Elle n'est pas surjective car: pour $y = -2; \forall x \in \mathbb{R}, g(x) \neq -2$ ($g(x)$ est toujours positive).

(2) A- t- on $f \circ g = g \circ f$? Justifier.

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = \frac{2}{x^2+1} + 5$ et $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x+5) = \frac{1}{(2x+5)^2+1}$,
$\Rightarrow f \circ g \neq g \circ f$.

(3) Disons si les propositions sont vraies ou fausses.

Notons que f est bijective car: $f'(x) = 3 > 0$,
$\Rightarrow f$ est strictement croissante d'où l'injectivité de f.
d'autre part: $y = 2x + 5 \Rightarrow x = \frac{y-5}{2}$,
$\Rightarrow \forall y \in \mathbb{R}; \exists x = \frac{y-5}{2} \in \mathbb{R}$ tel que: $f(x) = y \Rightarrow f$ est surjective.
(a) $f(\{0\}) = \{5\}$ est vraie car: $f(0) = 5$.
(b) $0 \in f^{-1}(\{5\})$ est vraie car: $f(0) = 5$.
(c) $f^{-1}(5) = 0$ est vraie car: f est bijective et $f(0) = 5$.
(d) $g^{-1}(\{1\}) = \{0\}$ est vraie car: $g(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}; g(x) \neq 1$.
(e) $g^{-1}(\{0\}) = \emptyset$ est vraie car: $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \neq 0$.

(4) Déterminons: $f([0,1])$, $f^{-1}([5,7])$, $f(\mathbb{R})$, $g([-4,-1])$, $g([-2,-1])$ et $g([-4,-1] \cap [-2,-1])$.

f est une fonction croissante et g est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et croissante sur $\mathbb{R}^-$donc:
(i) $f([0,1]) = [f(0), f(1)] = [5,7]$.

(ii) $f^{-1}([5,7]) = \left[f^{-1}(5), f^{-1}(7)\right] = [0,1]$.
(iii) $f(\mathbb{R}) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[=]-\infty, +\infty[$.

(iv) $g([-4,-1]) = [g(-4), g(-1)] = \left[\frac{1}{17}, \frac{1}{2}\right]$.
(v) $g([-2,-1]) = [g(-2), g(-1)] = \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right]$.
(vi) $g([-4,-1] \cap [-2,-1]) = g([-2,-1]) = \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right]$.

(5) Déterminons $g^{-1}([-4,-1])$, $g^{-1}([0,4[)$ et $g^{-1}([1,+\infty[)$.

(i) $g^{-1}([-4,-1]) = \emptyset$ car: $g(x) > 0$.
(ii) $g^{-1}([0,4[) = g^{-1}(]0,1[) = \mathbb{R}$.
(iii) $g^{-1}([1,+\infty[) = g^{-1}\{1\} = \{0\}$,car: $0 < g(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Exercice 02:

(1) Montrons que f de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$ définie par:

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|} \text{ est bijective et déterminer sa réciproque.}$$

(a) f est elle injective?

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$?

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1}{1+|x_1|} = \frac{x_2}{1+|x_2|}$($x_1, x_2$ ont le même signe),

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x_1}{1+x_1} = \frac{x_2}{1+x_2} \text{ si } x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0 \Rightarrow x_1 = x_2, \\ \frac{x_1}{1+x_1} = \frac{x_2}{1-x_2} \text{ si } x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \leq 0, \text{ne convient pas car } x_1, x_2 \text{ ont le même signe}, \\ \frac{x_1}{1-x_1} = \frac{x_2}{1+x_2} \text{ si } x_1 \leq 0 \text{ et } x_2 \geq 0, \text{ne convient pas car } x_1, x_2 \text{ ont le même signe}, \\ \frac{x_1}{1-x_1} = \frac{x_2}{1-x_2} \text{ si } x_1 \leq 0 \text{ et } x_2 \leq 0 \Rightarrow x_1 = x_2, \end{cases}$$

$\Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ est injective.

(b) f est elle surjective?

Montrons que: $\forall y \in \left]-1, 1\right[, \exists x \in \mathbb{R}$ tel que: $f(x) = y$.

(i) Si $y \in \left]-1, 0\right[\Rightarrow x < 0 \Rightarrow \frac{x}{1-x} = y \Rightarrow x = \frac{y}{1+y} < 0$ qui existe si: $y \in \left]-1, 0\right[$.

(ii) Si $y \in \left[0, 1\right[\Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow \frac{x}{1+x} = y \Rightarrow x = \frac{y}{1-y} < 0$ qui existe si: $y \in \left[0, 1\right[$.

conclusion: f est une application bijective car elle est injective et surjective avec:

$$\begin{aligned} f^{-1} \quad &: \quad \left]-1, 1\right[\to \mathbb{R} \\ y \quad &\mapsto \quad \begin{cases} \frac{y}{1-y} \text{ si } y \in \left[0, 1\right[, \\ \frac{y}{1+y} \text{ si } y \in \left]-1, 0\right[. \end{cases} \end{aligned}$$

(2) Soit g l'application de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle $[-1, 1]$ définie par:

$$g(x) = \sin(\pi x).$$

(a) Cette application est-elle injective? surjective? bijective?

(i) g n'est pas injective car: si $x_1 = 0$ et $x_2 = 2; x_1 \neq x_2$ mais: $g(x_1) = g(x_2) = 0$.

(ii) $-1 \leq \sin(\pi x) \leq 1 \Rightarrow g$ est surjective.

(iii) g n'est pas bijective car elle n'est pas injective.

(b) Montrons que la restriction de g à $\left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ est une bijection de $\left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ sur $]-1, 1[$.

Soit h la restriction de g à $\left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[\Rightarrow$

$$\begin{aligned} h \quad &: \quad \left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[\to \left]-1, 1\right[\\ x \quad &\mapsto \quad h(x) = \sin(\pi x). \end{aligned}$$

(i) h est surjective car: si $x \in \left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ alors $-1 < \sin(\pi x) < 1$.
(ii) il reste à montrer que: h est injective?
Soient $x_1, x_2 \in \left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, si $h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow \sin(\pi x_1) - \sin(\pi x_2) = 0$

$\Rightarrow 2\sin\left(\pi \frac{(x_1-x_2)}{2}\right) \cos\left(\pi \frac{(x_1+x_2)}{2}\right) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin\left(\pi \frac{(x_1-x_2)}{2}\right) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \text{ ou } \left(x_1 - x_2 = 2 \text{ (impossible dans } \left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[)\right), \\ \text{ou bien} \\ \cos\left(\pi \frac{(x_1+x_2)}{2}\right) = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 1 \text{ cas qui n'est pas possible.} \end{cases}$$

$\Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow h$ est injective
Conclusion: h est bijective car elle est injective et bijective.

Exercice 03: Les applications suivantes sont elles injectives, surjectives, bijectives ?

(a) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$. (b) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto |x| - [x]$. (c) $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \sqrt{x}$.

(a)

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\sin x}{x}. \end{array}$$

(i) f n'est pas injective car: $x_1 = 2\pi, x_2 = 4\pi, x_1 \neq x_2$ mais $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

(ii) Pour surjective: si on pose l'application $h(x) = \sin x - x \Rightarrow h'(x) = \cos x - 1$,
$\Rightarrow h'(x) \leq 0 \Rightarrow h$ est décroissante,

$\Rightarrow$ le seul cas pour que $h(x) = 0$ quand $x = 0$ donc pour $y = 1, \forall x \in \mathbb{R}^*, \sin x \neq x$,
$\Rightarrow \frac{\sin x}{x} \neq 1 \Rightarrow f(x) \neq 1$.
Alors f n'est pas surjective.
Conclusion: f n'est pas bijective car elle est ni injective ni surjective.

(b)

$$\begin{array}{rcl} g & : & \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \\ x & \mapsto & |x| - [x], \end{array}$$

$[x]$ désigne la partie entière qui est donnée par définition: $[x] = \max y$ avec $y \in \mathbb{Z}$ et $y \leq x$.

(i) g n'est pas injective car: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_1 \neq x_2$ mais $g(x_1) = g(x_2) = 0$.

(ii) Pour surjective: on a pour $x \in \mathbb{Z}^+, g(x) = 0$ et si $x \in \mathbb{Z}^-, g(x) = -x - x = -2x \in \mathbb{N}$ qui est pair.

$\Rightarrow \forall y = 2k+1$ (impair)$, \forall x \in \mathbb{Z}, g(x) \neq y$. Alors g n'est pas surjective.

(c)

$$\begin{array}{rcl} h & : & \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x}. \end{array}$$

(i) Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+, h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$ car h est strictement croissante, ce qui implique que h est injective.

(ii) Pour surjective: $\forall y \in \mathbb{R}^+, \exists x \in \mathbb{R}^+$ tel que: $y = \sqrt{x}$ (il suffit de prendre $x = y^2$).
$\Rightarrow h$ est surjective

Conclusion: h est bijective car elle est injective et surjective.

Exercice 04: Soit f de $[0,1[$ dans $[1,+\infty[$ définie par:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(1) Montrons que f est une application et qu'elle est bijective.

(i) f est une application $\Leftrightarrow \forall x \in [0,1[, \exists y \in [1,+\infty[$ tel que: $f(x) = y$?

$f'(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \geq 0$ car $x \in [0,1[\Rightarrow f$ est croissante de plus on a:
$f(0) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$,
$\Rightarrow f([0,1[) = [1,+\infty[$ d'où f est une application de $[0,1[$ dans$[1,+\infty[$.

(ii) Montrons que f est bijective.

* f est injective car: $\forall x_1, x_2 \in [0,1[, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x_2^2}}$,

$\Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$.

* f est surjective car: $\forall y\in\left[1,+\infty\right[,\exists x\in\left[0,1\right[$ tel que: $f\ (x)=y\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=y$,

$\Rightarrow x=\frac{\sqrt{y^2-1}}{y}\in[0,1[$car $y\geq 1$.(c'est la formule qui donne f^{-1})

Conclusion: f est bijective car elle est injective et surjective.

(2) Puisque f est bijective alors l'application réciproque est donnée par:

$$\begin{array}{rcl} f^{-1} & : & \left[1,+\infty\right[\rightarrow\left[0,1\right[\\ y & \mapsto & f^{-1}(y)=\dfrac{\sqrt{y^2-1}}{y}. \end{array}$$

Exercice 05: Soit $h:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ définie par: $h(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

(1) h est elle injective? Justifier.

Montrons que: $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$, si $h(x_1)=h(x_2)$ alors $x_1=x_2$?
Soient $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, si $h(x_1)=h(x_2)\Rightarrow\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+1}}=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+1}}$,
$\Rightarrow x_1$ et x_2 ont le même signe,
$\Rightarrow\frac{x_1^2}{x_1^2+1}=\frac{x_2^2}{x_2^2+1}\Rightarrow x_1^2=x_2^2$,
$\Rightarrow x_1=x_2$ (car x_1 et x_2 ont le même signe) $\Rightarrow f$ est injective.

(2) h est elle surjective?

Montrons que: $\forall y\in\mathbb{R},\exists x\in\mathbb{R}$ tel que: $f(x)=y$.
$f(x)=y\Leftrightarrow\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=y$ (x et y ont le même signe),
$\Rightarrow\left(x^2+1\right).y^2=x^2\Leftrightarrow x^2\left(1-y^2\right)=y^2$,
$\Rightarrow y\neq\pm1$ et $y\in\left]-1,1\right[$ pour garder les signe donc:

$$\text{Si } y\in\left]-1,1\right[,x=\pm\sqrt{\frac{y^2}{1-y^2}}.$$

Conclusion: pour $y\in\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right[$ le x n'existe pas donc h n'est pas surjective.

(3) D'après (1) et (2)

$$\begin{array}{rcl} g & : & \mathbb{R}\rightarrow\left]-1,1\right[\\ x & \mapsto & g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \end{array}$$

est une application bijective avec:

$$\begin{array}{rcl} g^{-1} & : & \left]-1,1\right[\rightarrow\mathbb{R} \\ x & \mapsto & g^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}} & \text{si } x\geq 0\\ -\sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}} & \text{si } x<0\end{cases}. \end{array}$$

Exercice 06: Soit h l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par: $h(x)=\frac{4x}{x^2+1}$.

(1) Vérifions que pour tout réel a non nul on a: $h(a)=h\left(\frac{1}{a}\right)$.

$h(a)-h\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{4a}{a^2+1}-\frac{4\frac{1}{a}}{\left(\frac{1}{a}\right)^2+1}=0\Rightarrow h(a)=h\left(\frac{1}{a}\right)$.
L'application h est-elle injective? Justifier.
h n'est pas injective car pour: $x_1=2$ et $x_2=\frac{1}{2},x_1\neq x_2$ mais d'après (1) $h(2)=h\left(\frac{1}{2}\right)$.

(2) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I=\left[1,+\infty\right[$ par $f(x)=h(x)$.

(a) Montrons que f est injective ç-à-d :

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \text{si } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

En effet: si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{4x_1}{x_1^2+1} = \frac{4x_2}{x_2^2+1} \Rightarrow (x_1 - x_2)(1 - x_1 x_2) = 0$

$\Rightarrow (x_1 = x_2)$ ou $\left(x_1 = \frac{1}{x_2}\right)$ cas qui n'est pas possible pour: $x_1, x_2 \in [1, +\infty[$ sauf si $x_1 = x_2 \Rightarrow f$ est injective.

(b) Vérifions que: $\forall x \in I,\ f(x) \leq 2.$

Soit $x \in I, f(x) - 2 = \frac{-2(x-1)^2}{1+x^2} \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq 2.$

(c) Montrons que f est une bijection de I sur $]0, 2]$ et trouvons $f^{-1}(x)$.

On a: f est injective de plus:
f est surjective car: $\forall y \in]0, 2]$, $\exists x \in [1, +\infty[$ tel que: $f(x) = y$.
En effet: $\frac{4x}{x^2+1} = y \Rightarrow yx^2 - 4x + y = 0, \triangle = 16 - 4y^2 \geq 0$ car: $y \in]0, 2]$,
$\Rightarrow x_1 = 2 + 2\sqrt{4 - y^2}$ou $x_2 = \left(2 - 2\sqrt{4 - y^2}\right) \leq 0$ une solution qui ne convient pas,
$\Rightarrow x = 2 + 2\sqrt{4 - y^2}$ qui existe $\forall y \in]0, 2]$.
Conclusion: f est bijective car elle est injective et surjective.
De plus l'application réciproque est:

$$\begin{array}{ccl} f^{-1} & : &]0, 2] \to [1, +\infty[\\ x & \mapsto & f^{-1}(x) = 2 + 2\sqrt{4 - x^2}. \end{array}$$

Exercice 07: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par: $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

(1) Calculons $f(2)$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)$. f est-elle injective?

$f(2) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{5} \Rightarrow f$ n'est pas injective car:
pour $x_1 = 2$ et $x_2 = \frac{1}{2}, x_1 \neq x_2$ mais $f(2) = f\left(\frac{1}{2}\right)$.

(2) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $f(x) = 2$. f est-elle surjective?

$f(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+1} = 2 \Leftrightarrow 2x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow \triangle = -15 < 0,$
$\Rightarrow$ l'ensemble des solutions est vide ($\emptyset$), donc pour $y = 2, \forall x \in \mathbb{R}; f(x) \neq 2,$
$\Rightarrow f$ n'est surjective.

(3) Déterminons $f(\mathbb{R})$.(Indication: utiliser $(x+1)^2 \geq 0$ et $(x-1)^2 \geq 0$).

on a: $(x+1)^2 \geq 0$ et $(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq -2x$ et $x^2 + 1 \geq 2x,$
$\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow f(\mathbb{R}) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$

Exercice 08: Soient a, b, c et d des réels non nuls donnés, et soit f définie comme suit:

$$\begin{array}{ccl} f & : & A \to B \\ x & \mapsto & f(x) = \dfrac{ax+c}{bx+d}. \end{array}$$

Comment doit-on choisir les plus grands inconnus A et B et les autres constantes pour que f soit:

(1) f est une application si $\forall x \in A, \exists y \in B$ tel que: $y = f(x)$.

On remarque que $f(x)$ existe pour tout $x \neq -\frac{d}{b} \Rightarrow A = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{b}\right\}.$

(2) f est injective $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{ax_1+c}{bx_1+d} = \frac{ax_2+c}{bx_2+d} \Rightarrow (ax_1+c)(bx_2+d) = (bx_1+d)(ax_2+c)$,
$\Rightarrow abx_1x_2 + adx_1 + cbx_2 + cd = abx_1x_2 + bcx_1 + dax_2 + cd$,
$\Rightarrow adx_1 + cbx_2 = bcx_1 + dax_2$,
$\Rightarrow (ad-bc)\, x_1 = (ad-bc)\, x_2$,
donc pour que $x_1 = x_2$ il suffit que: $(ad-bc) \neq 0$.
Conclusion: pour que f est injective il faut que:
$(ad-bc) \neq 0$ et $A = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{b}\right\}$(la condition de l'application).

(3) f est surjective $\Leftrightarrow \forall y \in B, \exists x \in A$ tel que: $f(x) = y$.

$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{ax+c}{bx+d} = y \Leftrightarrow ax + c = (bx+d)\, y \Leftrightarrow x = \frac{dy-c}{a-by}$ qui existe si $y \neq \frac{a}{b}$.
f est surjective $\Leftrightarrow y \neq \frac{a}{b}$,
$\Leftrightarrow B = \mathbb{R} - \left\{\frac{a}{b}\right\}$ et $A = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{b}\right\}$(la condition de l'application).

(4) f soit une application bijective $\Leftrightarrow f$ est une application injective et surjective donc:

$A = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{b}\right\}, (ad-bc) \neq 0$ et $B = \mathbb{R} - \left\{\frac{a}{b}\right\}$.