Université Aboubekr Belkaid-Tlemcen
Module: Mathématiques 1   Série de TD 03- Les applications.
1ère Année Sciences et technologies 2019-2020.

Exercice 01: Soient f et g deux applications définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que:

$$f(x) = 2x + 5 \text{ et } g(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

(1) g est- elle injective? surjective?

(2) A- t- on $f \circ g = g \circ f$? Justifier.

(3) Disons si les propositions sont vraies ou fausses.

(a) $f(\{0\}) = \{5\}$
(b) $0 \in f^{-1}(\{5\})$
(c) $f^{-1}(5) = 0$
(d) $g^{-1}(\{1\}) = \{0\}$
(e) $g^{-1}(\{0\}) = \emptyset$

(4) Déterminons: $f([0,1])$, $f^{-1}([5,7])$, $f(\mathbb{R}), g([-4,-1]), g([-2,-1])$ et $g([-4,-1] \cap [-2,-1])$.

(5) Déterminons $g^{-1}([-4,-1]), g^{-1}([0,4[)$ et $g^{-1}([1,+\infty[)$.

Exercice 02:

(1) Montrons que f de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$ définie par:

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|} \text{ est bijective et déterminer sa réciproque.}$$

(2) Soit g l'application de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle $[-1,1]$ définie par:

$$g(x) = \sin(\pi x).$$

(a) Cette application est-elle injective? surjective? bijective?

(b) Montrons que la restriction de g à $\left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ est une bijection de $\left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ sur $]-1,1[$.

Exercice 03: Les applications suivantes sont elles injectives, surjectives, bijectives ?

(a) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$.   (b) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto |x| - [x]$.   (c) $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \sqrt{x}$.

Exercice 04: Soit f de $[0,1[$ dans $[1,+\infty[$ définie par:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(1) Montrons que f est une application et qu'elle est bijective.

(2) Trouver l'application réciproque.

Exercice 05: Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par: $h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

(1) h est elle injective? Justifier.

(2) h est elle surjective?

(3) Trouver h^{-1}.

Exercice 06: Soit h l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par: $h(x) = \frac{4x}{x^2+1}$.

(1) Vérifions que pour tout réel a non nul on a: $h(a) = h\left(\frac{1}{a}\right)$. Que peut-on déduire?

(2) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = [1, +\infty[$ par $f(x) = h(x)$.

(a) Montrons que f est injective.

(b) Vérifions que: $\forall x \in I,\ f(x) \leq 2$.

(c) Montrons que f est une bijection de I sur $]0, 2]$ et trouvons $f^{-1}(x)$.

Exercice 07: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par: $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

(1) Calculons $f(2)$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)$. f est-elle injective?

(2) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $f(x) = 2$. f est-elle surjective?

(3) Déterminons $f(\mathbb{R})$.(Indication: utiliser $(x+1)^2 \geq 0$ et $(x-1)^2 \geq 0$).

Exercice 08: Soient a, b, c et d des réels non nuls donnés, et soit f définie comme suit:

$$\begin{array}{ccl} f & : & A \to B \\ x & \mapsto & f(x) = \dfrac{ax+c}{bx+d}. \end{array}$$

Comment doit-on choisir les plus grands inconnus A et B et les autres constantes pour que f soit:

(1) f est une application.

(2) f est injective.

(3) f est surjective.

(4) f soit une application bijective.