Université Aboubekr Belkaid-Tlemcen
Module: Mathématiques 1 Série de TD 02- Les relations.
1ère Année Sciences et technologies " Le corrigé" MR, MESSIRDI BACHIR

Exercice 01: Complétons les diagrammes suivants pour qu'une relation binaire $\Re$, sur l'ensemble $A = \{1, 2, 3, 4\}$, soit:

(1) Symétrique, transitive mais non réflexive.

$\Re$	1	2	3	4
1				
2		+	+	+
3		+	+	+
4		+	+	+

(2) Réflexive, non symétrique et non transitive.

$\Re$	1	2	3	4
1	+		+	
2	+	+	+	
3			+	+
4		+		+

On remarque que $3\Re 4$ mais $4 \not\Re 3$ donc $\Re$ est non symétrique, et $1\Re 3$ et $3\Re 4$ mais $1 \not\Re 4$ ce qui implique que $\Re$ n'est pas transitive.

(3) Une relation d'équivalence, puis donner la classe d'équivalence de chaque élément de A .

$\Re$	1	2	3	4
1	+	+	+	+
2	+	+	+	+
3	+	+	+	+
4	+	+	+	+

$cl(a) = \{a \in A / x\Re a\} \Rightarrow cl(1) = cl(2) = cl(3) = cl(4) = \{1, 2, 3, 4\}$.

Exercice 02: Soit l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 5, 8, 14, 17\}$, et soit la relation définie par:

$$x\Re y \Longleftrightarrow \frac{x+y}{2} \in \mathbb{N}.$$

(1) Montrons que $\Re$ est une relation d'équivalence dans $E \subset \mathbb{N}$.

a) $\Re$ est-elle réflexive?

$\Re$ est réflexive $\Leftrightarrow \forall x \in E, x\Re x$.

$$\forall x \in E, \frac{x+x}{2} = x \in \mathbb{N} \Rightarrow x\Re x \Rightarrow \Re \text{ est réflexive.}$$

b) R est-elle symétrique?

R est symétrique $\Leftrightarrow \forall x, y \in E,\ x\Re y \Rightarrow y\Re x$.
Soient $x, y \in E$,si $x\Re y \Rightarrow \frac{x+y}{2} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{y+x}{2} \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow y\Re x \Rightarrow \Re$ est symétrique.

c) $\Re$ est-elle transitive?

$\Re$ est transitive $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in E, x\Re y$ et $y\Re z$
$\Rightarrow x\Re z$.
Soient $x, y, z \in E, x\Re y$ et $y\Re z$ d'où:

$$\begin{aligned}
\frac{x+y}{2} &\in \mathbb{N} \text{ et } \frac{y+z}{2} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{x+y}{2} + \frac{y+z}{2} \in \mathbb{N} \\
&\Rightarrow \frac{x+z}{2} + y \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{x+z}{2} \in \mathbb{N} \text{ car } y \in \mathbb{N}, \\
&\Rightarrow x\Re z, \\
&\Rightarrow \Re \text{ est transitive.}
\end{aligned}$$

Conclusion: $\Re$ est une relation d'équivalence dans E.

(2) trouvons Les classes d'équivalences.

La classe d'équivalence d'un élément $x \in E$ est donnée par la définition:

$$\dot{x} = \{y \in E, x\Re y\}.$$

$x\Re y \Leftrightarrow \frac{x+y}{2} \in \mathbb{N}$ alors:

$$\dot{1} = \{1, 3, 5, 17\} \text{ et } \dot{2} = \{2, 8, 14\},$$

ce qui implique que l'ensemble quotient est:

$$E/\Re = \left\{\dot{1}, \dot{2}\right\}.$$

Exercice 03: Soit R la relation binaire définie sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ par:

$$(x, y) R (x', y') \Leftrightarrow xy' - x'y = 0.$$

(1) Montrons que R est une relation d'équivalence.

a) R est-elle réflexive**?**

R est réflexive $\Leftrightarrow \ \forall (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \ (x, y) R (x, y)$.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \Rightarrow xy - xy = 0 \Rightarrow (x, y) R (x, y) \Rightarrow R \text{ est réflexive.}$$

b) R est-elle symétrique**?**

R est symétrique $\Leftrightarrow \forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, (x, y) R (x', y') \Rightarrow (x', y') R (x, y)$.
Soient $(x, y), (x', y') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$,si $(x, y) R (x', y') \Rightarrow xy' - x'y = 0 \Rightarrow x'y - xy' = 0$?
$\Rightarrow (x', y') R (x, y) \Rightarrow R$ est symétrique.

c) R est-elle transitive**?**

R est transitive $\Leftrightarrow \forall (x, y), (x', y'), (x'', y'') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, (x, y) R (x', y')$ et $(x', y') R (x'', y'')$
$\Rightarrow (x, y) R (x'', y'')$.
Soient $(x, y), (x', y'), (x'', y'') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, (x, y) R (x', y')$ et $(x', y') R (x'', y'')$ d'où:

$$\begin{aligned}
xy' - x'y &= 0 \text{ et } x'y'' - x''y' = 0 \Rightarrow x' = \frac{xy'}{y} \text{ car } y \in \mathbb{N}^*, \\
&\Rightarrow \frac{xy'}{y}y'' - x''y' = 0 \Rightarrow \frac{x}{y}y'' - x'' = 0 \text{ car } y' \in \mathbb{N}^*, \\
&\Rightarrow xy'' - yx'' = 0 \Rightarrow (x, y) R (x'', y''), \\
&\Rightarrow R \text{ est transitive.}
\end{aligned}$$

Conclusion: R est une relation d'équivalence dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

(2) Déterminons $cl\ ((1,2))$ et $cl\ ((-1,2))$.

$$\begin{aligned} cl\left((1,2)\right) &= \left\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*, (x,y)\,R\,(1,2)\right\}. \\ (x,y)\,R\,(1,2) &\Leftrightarrow 2x-y=0 \Rightarrow cl\left((1,2)\right)=\left\{x\,(1,2)\,, x\in\mathbb{N}^*\right\}. \end{aligned}$$

Par suite:

$$\begin{aligned} cl\left((-1,2)\right) &= \left\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*, (x,y)\,R\,(-1,2)\right\}, \\ (x,y)\,R\,(-1,2) &\Leftrightarrow 2x+y=0 \Rightarrow cl\left((-1,2)\right)=\left\{x\,(1,-2)\,, x\in\mathbb{Z}_-^*\right\}. \end{aligned}$$

Exercice 04: On définit dans $\mathbb{Z}$ la relation S par:

$$aSb \Leftrightarrow a\leq b+1.$$

(1) Vérifions que $0\ S\ 1$ et $1\ S\ 0$.Donnons une conclusion?

$0\leq 1+1\Rightarrow 0S1$ et $1\leq 0+1\Rightarrow 1S0$ alors la relation S n'est pas antisymétrique.

(2) Soit R la relation définie sur $\mathbb{Z}$ par:

$$aRb \Leftrightarrow a\langle b+1.$$

Montrons que R est une relation d'ordre dans $\mathbb{Z}$.

a) R est-elle réflexive**?**

R est réflexive $\Leftrightarrow \forall a\in\mathbb{Z}, aRa$.

$$\forall a\in\mathbb{Z}, a\langle a+1 \Rightarrow aRa \Rightarrow R \text{ est réflexive.}$$

b) R est-elle antisymétrique**?**

R est antisymétrique $\Leftrightarrow \forall a,b\in\mathbb{Z}, aRb$ et $bRa\Rightarrow a=b$.

$$\begin{aligned} \text{Soient } a,b &\in \mathbb{Z}, aRb \text{ et } bRa \Rightarrow a\langle b+1 \text{ et } b\langle a+1, \\ &\Rightarrow a\leq b \text{ et } b\leq a \text{ car: } a,b\in\mathbb{Z}, \\ &\Rightarrow a=b\Rightarrow R \text{ est antisymétrique.} \end{aligned}$$

Autre méthode: on a

$$a-1<b<a+1\Rightarrow b=a,$$

car on a un entier compris strictement entre deux entiers consécutifs.

c) R est-elle transitive**?**

R est transitive $\Leftrightarrow \forall a,b,c\in\mathbb{Z}, aRb$ et $bRc\Rightarrow aRc$.
Soient $a,b,c\in\mathbb{Z}, aRb$ et $bRc\Rightarrow a\langle b+1$ et $b\langle c+1\Rightarrow a\leq b$ et $b\leq c\Rightarrow a\leq c$,
$\Rightarrow a<c+1\Rightarrow aRc\Rightarrow R$ est transitive.
Conclusion: R est une relation d'ordre.

Exercice 05: Soit $\Re$ la relation définie sur $\mathbb{N}$ par:

$$\forall x,y\in\mathbb{N}, x\Re y\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{N}, x=ky.$$

(1) Montrons que $\Re$ est une relation d'ordre dans $\mathbb{N}$.

a) $\Re$ est-elle réflexive**?**

$\Re$ est réflexive $\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{N}, x\Re x$.
$\forall x\in\mathbb{N}, \exists k=1\in\mathbb{N}, x=1.x\Rightarrow x\Re x\Rightarrow \Re$ est réflexive.

b) $\Re$ est-elle antisymétrique**?**

$\Re$ est antisymétrique $\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{N}, x\Re y$ et $y\Re x \Rightarrow x = y$.
Soient $x, y \in \mathbb{N}, x\Re y$ et $y\Re x \Rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N}$ tel que: $x = k_1 y$ et $\exists k_2 \in \mathbb{N}$ tel que: $y = k_2 x$,
$\Rightarrow x = k_1 k_2 x \Rightarrow k_1 k_2 = 1 \Rightarrow k_1 = k_2 = 1 \Rightarrow x = y \Rightarrow \Re$ est antisymétrique.

c) $\Re$ est-elle transitive**?**

$\Re$est transitive $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in \mathbb{N}, x\Re y$ et $y\Re z \Rightarrow x\Re z$.
Soient $x, y, z \in \mathbb{N}, x\Re y$ et $y\Re z \Rightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{N}, x = k_1 y$ et $y = k_2 z$,
$\Rightarrow x = k_1 k_2 z \Rightarrow \exists k_3 = k_1 k_2 \in \mathbb{N}, x = k_3 z \Rightarrow \Re$ est transitive.
Conclusion: $\Re$ est une relation d'ordre.

(2) Cet ordre est-il total? Justifier.

L'ordre est partiel car pour 2 et $3, \forall k \in \mathbb{N}, 2 \neq k.3$ et $3 \neq k.2$, alors ni $2\Re 3$ ni $3\Re 2$.

(3) Déterminons, s'il existent $\sup\{3, 12\}, \sup\{3, 7\}, \inf\{3, 12\}$ et $\inf\{3, 7\}$.

a) M est un majorant de $A = \{3, 12\} \Leftrightarrow \forall x \in A, x\Re M$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\Re M \Leftrightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N}, 3 = k_1 M \\ \text{et } 12\Re M \Leftrightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N}, 12 = k_2 M, \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} M = 1 \text{ ou } 3.\text{(les produits avec } k_1 \text{ pour avoir 3)} \\ \text{et } M = 1, 2, 3, 4, 6 \text{ ou } 12.\text{(les produits avec } k_2 \text{ pour avoir 12).} \end{cases}$
Alors les seuls majorants de A sont: 1 et 3 (l'intersection des deux cas).
D'autre part: $3 = 3.1 \Rightarrow 3\Re 1 \Rightarrow \sup\{3, 12\} = 3$.

b) m est un minorant de $A = \{3, 12\} \Leftrightarrow \forall x \in A, m\Re x$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\Re 3 \Leftrightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N}, m = k_1 3 \\ \text{et } m\Re 12 \Leftrightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N}, m = k_2 12. \end{cases}$
Alors les minorants de A sont les multiples de 12. (l'intersection des deux cas).
D'autre part: $\forall m = k_1 12, m\Re 12 \Rightarrow \inf\{3, 12\} = 12$.

c) M est un majorant de $B = \{3, 7\} \Leftrightarrow \forall x \in B, x\Re M$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\Re M \Leftrightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N}, 3 = k_1 M \\ \text{et } 7\Re M \Leftrightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N}, 7 = k_2 M, \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} M = 1 \text{ ou } M = 3\text{(les produits avec } k_1 \text{ pour avoir 3)} \\ \text{et } M = 1 \text{ ou } M = 7\text{(les produits avec } k_2 \text{ pour avoir 7).} \end{cases}$
Alors le seul majorant de B est: 1. (l'intersection des deux cas).
$\Rightarrow \sup\{3, 7\} = 1$.

d) m est un minorant de $A = \{3, 7\} \Leftrightarrow \forall x \in A, m\Re x$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\Re 3 \Leftrightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N}, m = k_1 3. \\ \text{et } m\Re 7 \Leftrightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N}, m = k_1 7. \end{cases}$
Alors les minorants de A sont les multiples de 21.
D'autre part: $\forall m = k_3 21, m\Re 21 \Rightarrow \inf\{3, 7\} = 21$.

(4) $\Re$ est-elle une relation d'ordre si on remplace $\mathbb{N}$ par $\mathbb{Z}$? Justifier.

Pour la relation:
$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, x\Re y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = ky.$$
Elle n'est pas antisymétrique car:
$$k_1 k_2 = 1 \Rightarrow k_1 = k_2 = 1 \text{ ou } k_1 = k_2 = -1. \text{(les } k_i \in \mathbb{Z})$$
Alors $2\Re(-2)$ et $(-2)\Re 2$ mais $2 \neq -2$.

Exercice 06: Soit E l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$ de la forme $]-\infty, x]$ avec $x \in \mathbb{R}$, ç-à-d: $E = \{]-\infty, x], x \in \mathbb{R}\}$.

On définit dans E la relation $\Re$ par:

$$\forall X, Y \in E, X \Re Y \Leftrightarrow X \subset Y.$$

1) Montrons que $\Re$ est une relation d'ordre.

a) $\Re$est-elle réflexive**?**

$\Re$ est réflexive $\Leftrightarrow \forall X \in E, X \Re X$.
$\forall X \in E, X \subset X \Rightarrow X \Re X \Rightarrow \Re$ est réflexive.

b) $\Re$ est-elle antisymétrique**?**

$\Re$ est antisymétrique $\Leftrightarrow \forall X, Y \in E, X \Re Y$ et $Y \Re X \Rightarrow X = Y$.
Soient $X, Y \in E, X \Re Y$ et $Y \Re X \Rightarrow X \subset Y$ et $Y \subset X \Rightarrow X = Y \Rightarrow \Re$ est antisymétrique.

c) $\Re$ est-elle transitive**?**

$\Re$ est transitive $\Leftrightarrow \forall X, Y, Z \in E, X \Re Y$ et $Y \Re Z \Rightarrow X \Re Z$.
Soient $X, Y, Z \in E, X \Re Y$ et $Y \Re Z \Rightarrow X \subset Y$ et $Y \subset Z$,
$\Rightarrow X \subset Z \Rightarrow X \Re Z \Rightarrow \Re$ est transitive.
Conclusion: $\Re$ est une relation d'ordre.

2) L'ordre est-il total ? Justifier.

Puisque $\forall X_1, X_2 \in E$ on a: $X_1 =]-\infty, x_1]$ et $X_2 =]-\infty, x_2]$ alors on a l'un des deux cas:
a) Si $x_1 \leq x_2 \Rightarrow X_1 \subset X_2 \Rightarrow X_1 \Re X_2$.
b) Si $x_2 \leq x_1 \Rightarrow X_2 \subset X_1 \Rightarrow X_2 \Re X_1$.
Alors l'ordre est total.

3) Soit $F \subset E$ défini par: $F = \{]-\infty, x],\ x \leq 5\}$.

a) Déterminons l'ensemble des majorants de F.

M est un majorant de $F \Leftrightarrow \forall X \in F, X \Re M$.
Soit $X \in F, X \Re M \Rightarrow X \subset M \Rightarrow M =]-\infty, 5] \cup Y$ avec $Y \subset [5, +\infty[$.
Alors l'ensemble des majorants est:

$$\{M =]-\infty, 5] \cup Y \text{ avec} Y \subset [5, +\infty[\}.$$

b) Déterminons, s'ils existes, $\sup F$ et le plus grand élément de F.

Si on pose: $M_0 = \sup F$ alors pour tout majorant M on a: $M_0 \Re M$.
$M_0 \Re M \Leftrightarrow M_0 \subset M \Rightarrow M_0 =]-\infty, 5] = \sup F \in F \Rightarrow \max F =]-\infty, 5]$.