Université Aboubekr Belkaid-Tlemcen

Module: Mathématiques 1
1ère Année Sciences et technologies

Série de TD 01- Logique - raisonnements et théorie des ensembles.

13/10/2019.

Exercice 01: Soit le nombre $A = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$, montrer que $A^3 = 4 - 3A$.

En déduire que $A = 1$.

Solution: (1) Sachant que: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ et $\sqrt[3]{} = ()^{\frac{1}{3}}$, alors:

$$\begin{aligned}
A^3 &= \left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)^3 \\
&= \left(2+\sqrt{5}\right) + 3\left(2+\sqrt{5}\right)^{\frac{2}{3}}\left(2-\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{3}} + 3\left(2+\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{3}}\left(2-\sqrt{5}\right)^{\frac{2}{3}} + 2 - \sqrt{5} \\
&= 4 + 3\left(2+\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{3}}\left(2-\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{3}}\left[\left(2+\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(2-\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{3}}\right] \\
&= 4 + 3\left[\left(2+\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)\right]^{\frac{1}{3}} A \\
&= 4 + 3\left[4-5\right]^{\frac{1}{3}} A = 4 - 3A.
\end{aligned}$$

Remarque: Si α est une racine d'un polynôme $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ alors α est un nombre algébrique et on dit que $\alpha \in \not{A}$, si non α est dite un nombre transcendant et on écrit $\alpha \in \not{T}$.

(2) Montrons que $A = 1$.

On a:

$$P(x) = x^3 + 3x - 4 = (x-1)\left(x^2 + x + 4\right)$$

sachant que pour $x^2 + x + 4 = 0, \triangle = -15 < 0$ ç-à-d les racines sont complexes et donc la seule racine réelle est $A = 1$ car dans notre cas A est une racine de $P(x) = x^3 + 3x - 4$.

Exercice 02:

Rappels: x

$$(1)\ |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0. \end{cases} = \max(x, -x).$$

(1) Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a)

$$|2x+1| < |5x-2|.$$

$$|2x+1| < |5x-2| \Rightarrow (2x+1)^2 < (5x-2)^2 \Rightarrow 4x^2 + 4x + 1 < 25x^2 - 20x + 4$$

$\Rightarrow 21x^2 - 24x + 3 > 0, \triangle = 324 \Rightarrow x_1 = \frac{24-18}{42} = \frac{1}{7}, x_1 = \frac{24+18}{42} = 1.$
Alors l'ensemble des solutions est: $S = \left]-\infty, \frac{1}{7}\right[\cup \left]1, +\infty\right[$.
Autre méthode:
On a: $2x+1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$, alors le signe de $2x+1$ est: $-\infty \quad - \quad -\frac{1}{2} \quad + \quad +\infty$

et

$5x-2=0 \Rightarrow x=\frac{2}{5}$, alors le signe de $5x-2$ est: $\underrightarrow{-\infty \qquad - \qquad \frac{2}{5} \qquad + \qquad\qquad +\infty}$, ce qui donne

x	$-\infty \qquad -\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$+\infty$
$\lvert 2x+1\rvert$	$-2x-1$	$2x+1$	$2x+1$
$\lvert 5x-2\rvert$	$-5x+2$	$-5x+2$	$5x-2$
$\lvert 2x+1\rvert < \lvert 5x-2\rvert$	$-2x-1<5x+2$	$2x+1<-5x+2$	$2x+1<5x-2$
	$\Rightarrow x<1$	$\Rightarrow x<\frac{1}{7}$	$\Rightarrow x>1$
S_I	$S_1=\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]$	$S_2=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{7}\right[$	$S_3=\left]1,+\infty\right]$
L'ensembles des solutions est:	$S=S_1\cup S_2\cup S_3=$	$\left]-\infty,\frac{1}{7}\right[\cup\left]1,+\infty\right[.$	

Remarque: Dans chaque colonne n'oubliez pas l'intervalle où le x appartient.

b)

$$\left|x^2-4\right|=x$$

Comme condition nécéssaire il faut que: $x\geq 0$, d'où:

$$\left|x^2-4\right|=x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4=x \Rightarrow x^2-x-4=0 \\ \text{ou} \\ x^2-4=-x \Rightarrow x^2+x-4=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} x_1=\frac{1+\sqrt{17}}{2} \text{ ou } x_2=\frac{1-\sqrt{17}}{2}(\text{ ne convient pas}) \\ \text{ou} \\ x_1=\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \text{ ou } x_2=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}(\text{ ne convient pas}) \end{cases}$$

Conclusion: l'ensemble des solutions est: $S=\left\{\frac{1+\sqrt{17}}{2},\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right\}$.

c)

$$|x+|x||\geq 2 \Rightarrow \begin{cases} |x-x|=0\geq 2 \text{ impossible dans le cas où: } x<0, \\ \text{ou} \\ |x+x|=2|x|\geq 2 \text{ si } x\geq 0. \end{cases}.$$

Dans le 2ème cas: implique que: $|x|\geq 1 \Rightarrow x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$.

Conclusion: l'ensemble des solutions est: $S=\left]1,+\infty\right[$.(car dans ce cas $x\geq 0$)

(2) Montrons que, pour $x,y\in\mathbb{R}$, on a:

a)

$$|x+y|\leq|x|+|y| \text{ ou bien: } (|x+y|)^2\leq(|x|+|y|)^2?$$

Car si $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^+,(\alpha\leq\beta)\Leftrightarrow\left(\alpha^2\leq\beta^2\right)$.
$(|x+y|)^2=(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=|x|^2+|y|^2+2xy\leq|x|^2+|y|^2+2|xy|$
$=|x|^2+|y|^2+2|x||y|=(|x|+|y|)^2\Rightarrow|x+y|\leq|x|+|y|$.

b)

$$|x-y|\geq||x|-|y|| \text{ ou bien: } (|x-y|)^2\geq(||x|-|y||)^2?$$

$(|x-y|)^2=(x-y)^2=x^2+y^2-2xy=|x|^2+|y|^2-2xy\geq|x|^2+|y|^2-2|xy|$

$=|x|^2+|y|^2-2|x||y|=(|x|-|y|)^2=(||x|-|y||)^2\Rightarrow|x-y|\geq||x|-|y||$.

Exercice 03: Mettre sous forme d'intervalles (ou union d'intervallles) les ensembles suivants:

$$(1)\ \ A=\left\{x\in\mathbb{R},x^2\geq 4 \text{ et } x<5\right\}.$$

$x^2\geq 4\Leftrightarrow x^2-4\geq 0\Leftrightarrow(x-2)(x+2)\geq 0\Leftrightarrow x\in\left]-\infty,-2\right[\cup\left]2,+\infty\right[$, mais $x<5\Rightarrow$

$$A=\left]-\infty,-2\right[\cup\left]2,5\right[.$$

$$(2)\ \ B=\left\{x\in\mathbb{R},\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}>1\right\}.$$

(1) Pour que l'équation soit bien définie il faut que:

$2x+1\geq 0$ et $x+1\geq 0 \Rightarrow x\geq -\frac{1}{2}$ et $x\geq -1$ donc $x\geq -\frac{1}{2}$.
De plus: $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}>1 \Leftrightarrow \sqrt{2x+1}>1+\sqrt{x+1}$,
$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+1}\right)^2 > \left(1+\sqrt{x+1}\right)^2 \Leftrightarrow 2x+1>x+1+1+2\sqrt{x+1}$
$\Leftrightarrow x-1>2\sqrt{x+1} \Leftrightarrow (x-1)^2 > \left(2\sqrt{x+1}\right)^2$ avec $x\geq 1$.
$\Leftrightarrow x^2-2x+1>4(x+1) \Leftrightarrow x^2-6x-3>0 \Rightarrow \triangle = 24$
$\Rightarrow x_1 = \frac{6-\sqrt{24}}{2} = 3+\sqrt{6}$ et $x_2 = 3-\sqrt{6}$.
Conclusion: l'ensemble des solutions est: $S = \left]3+\sqrt{6}, +\infty\right[$.

Exercice 04: Soit n un entier naturel non nul.

(1) Calculons:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \text{ et } \prod_{k=0}^{n} (-1)^k .$$

(1) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k$ est une somme partielle d'une suite géométrique de raison (-1).

Alors:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} (-1)^k &= 1\times \frac{1-(-1)^{n+1}}{1-(-1)} \\ &= \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est impair,} \\ 1 \text{ si } n \text{ est pair.}\end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \prod_{k=0}^{n} (-1)^k &= (-1)^0 (-1)^1 (-1)^2 ... (-1)^n \\ &= (-1)^{0+1+2+...+n} = (-1)^{\frac{n}{2}(n+1)} \\ &= \begin{cases} 1 \text{ si } n = 4k \\ (-1) \text{ si } n = 4k+1 \\ (-1) \text{ si } n = 4k+2 \\ 1 \text{ si } n = 4k+3 \end{cases} .\end{aligned}$$

(2) Vérifions que: $\frac{2}{k^2-1} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}$.

$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} = \frac{(k+1)-(k-1)}{(k-1)(k+1)} = \frac{2}{k^2-1}$.
Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} &= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k^2-1} = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n-1}\right) - \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{2n(n+1)+n(n+1)-2(n+1)-2n}{2n(n+1)}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{3n^2-n-2}{2n(n+1)}\right].\end{aligned}$$

(3) Calculons:

$$
\begin{aligned}
(1)\sum_{k=1}^{n} k\times k! &= \sum_{k=1}^{n}[(k+1)-1]\times k! \\
&= \sum_{k=1}^{n}(k+1)\times k! - \sum_{k=1}^{n} k! \\
&= \sum_{k=1}^{n}(k+1)! - \sum_{k=1}^{n} k! \\
&= (2!+3!+...+(n+1)!) - (1!+2!+3!+...+n!) \\
&= (n+1)! - 1.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{[(k+1)-1]}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)}{(k+1)!} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)!} \\
&= \left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}\right) - \left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}\right) \\
&= 1-\frac{1}{(n+1)!}.
\end{aligned}
$$

(4) Sachant qu'on a le binôme de Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

On développe:

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k \times 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k.$$

Ce qui implique que:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \times 1^k = (1+1)^n = 2^n.$$

et

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k = (-1+1)^n = 0^n = 0.$$

Exercice 05: Soient P, Q et R trois propositions:

(1) En utilisant la table de vérité, montrons que:

$$(*)\ \left[\left(\overline{P}\Rightarrow Q\right)\wedge R\right] \Leftrightarrow \left[\left(\overline{P}\vee\overline{R}\right)\Rightarrow (Q\wedge R)\right]$$

P	Q	R	$\overline{P}$	$\overline{R}$	$\overline{P}\Rightarrow Q$	$\overline{P}\vee\overline{R}$	$Q\wedge R$	$\left(\overline{P}\Rightarrow Q\right)\wedge R$	$\left(\overline{P}\vee\overline{R}\right)\Rightarrow(Q\wedge R)$	$(*)$
1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1
0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1

(2) Sans utiliser la table de vérité, montrer que:

$$(1)\left[\left(\overline{P}\Rightarrow Q\right)\wedge R\right]\Leftrightarrow\left[\left(\overline{P}\vee\overline{R}\right)\Rightarrow(Q\wedge R)\right].$$

$$\begin{aligned}\left[\left(\overline{P}\Rightarrow Q\right)\wedge R\right] &\Leftrightarrow [(P\vee Q)\wedge R]\Leftrightarrow[(P\wedge R)\vee(Q\wedge R)]\\ &\Leftrightarrow \left[\left(\overline{P\wedge R}\right)\Rightarrow(Q\wedge R)\right]\Leftrightarrow\left[\left(\overline{P}\vee\overline{R}\right)\Rightarrow(Q\wedge R)\right].\end{aligned}$$

$$(2)\left[\left(\bar{P}\vee Q\right)\wedge\left(P\vee\bar{Q}\right)\right]\Leftrightarrow(P\Leftrightarrow Q).$$

$$\begin{aligned}\left(\bar{P}\vee Q\right) &\Leftrightarrow (P\Rightarrow Q)\ \text{ et } P\vee\bar{Q}\Leftrightarrow\bar{Q}\vee P\Leftrightarrow(Q\Rightarrow P)\\ \text{alors} &: \left[\left(\bar{P}\vee Q\right)\wedge\left(P\vee\bar{Q}\right)\right]\Leftrightarrow(P\Rightarrow Q)\wedge(Q\Rightarrow P)\\ &\Leftrightarrow (P\Leftrightarrow Q).\end{aligned}$$

Dans les deux preuves on utilise le fait que

$$(P\Rightarrow Q)\Leftrightarrow\left(\overline{\overline{P\Rightarrow Q}}\right)\Longleftrightarrow\left(\overline{P\wedge\overline{Q}}\right)\Leftrightarrow\left(\overline{P}\vee Q\right).$$

(3) La proposition $\left[(P\wedge Q)\Rightarrow\left(\overline{P}\vee Q\right)\right]$ est-elle vraie?

L'implication est fausse dans un seul cas si la 1ère est vraie et le seconde membre est faux.
Dans notre cas $(P\wedge Q)$ si elle est vraie alors Q est vraie ce qui implique que $\left(\overline{P}\vee Q\right)$ est vraie, alors l'implication est vraie dans tous les cas.

Exercice 06: Ecrire, à l'aide de quantificateurs, les propositions suivantes:

(1) Certaines réels sont strictement supérieurs à leur carré.

$\exists x\in\mathbb{R},x>x^2$.

(2) Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.

C'est la négation de: $\exists n\in\mathbb{Z},\forall m\in\mathbb{Z},m\leq n$, c'est à dire: $\forall n\in\mathbb{Z},\exists m\in\mathbb{Z},m>n$.

(3) Il existe un entier multiple de tous les autres.

$\exists n\in\mathbb{Z},\forall m\in\mathbb{Z},\exists k\in\mathbb{Z},n=mk$.

(4) Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.

$\forall x,y\in\mathbb{R},x<y,\exists\alpha\in\mathbb{Q},x<\alpha<y$.

Exercice 07: (1) Ecrire la négation et la contraposée de la proposition suivante:

$$(\forall x\in\mathbb{R})\,(\exists y\in\mathbb{R})\,;x\leq a\Rightarrow y>b.$$

La négation est: $(\exists x\in\mathbb{R})\,(\forall y\in\mathbb{R})\,;(x\leq a)\wedge(y\leq b)$.
La contraposée est: $(\forall x\in\mathbb{R})\,(\exists y\in\mathbb{R})\,;y\leq b\Rightarrow x>a$.
(2) Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier

$$(P_1):\forall m\in\mathbb{N},\exists n\in\mathbb{N},n>m+1.$$

Ici n dépend de m. Elle est vraie car il suffit de prendre: $n=m+2$.

$$(P_2):\exists x\in\mathbb{R},\forall y\in\mathbb{R},x+y>0.$$

Elle est fausse car il suffit de prendre $y=-x$.
Pour meilleux comprendre on passe à la négation:

$$\left(\bar{P}_2\right):\forall x\in\mathbb{R},\exists y\in\mathbb{R},x+y\leq0\Rightarrow y\leq -x.$$

qui est vraie car il suffit de prendre $y=-x$. Donc la même cause donne (P_2) est fausse.

$$(P_3):\forall x\in\mathbb{R},\exists y\in\mathbb{R},x+y>0.$$

Elle est vraie car il suffit de prendre: $y=-x+1$.

Exercice 08: En utilisant un raisonnement par l'absurde, montrer que:

(1) Si x et y sont différents alors les nombres $(x+1)(y-1)$ et $(x-1)(y+1)$ sont différents.

On suppose par l'absurde que $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)$,
$\Rightarrow xy - x + y - 1 = xy + x - y - 1$,
$\Rightarrow 2y = 2x \Rightarrow x = y$ (contradiction avec l'hypothèse).

(2) Si a et p sont deux entiers naturels, alors:

$$(p \text{ premier et } p \text{ divise } a^2) \Rightarrow p \text{ divise } a.$$

Si p premier et p divise $a^2 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ tel que: $a^2 = k \cdot p \Rightarrow a \cdot a = k \cdot p$,

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} a \text{ divise } p \text{ et } k \text{ divise } a \text{ contradiction avec le fait que } p \text{ est premier,} \\ \text{ou bien } p \text{ divise } a \text{ et } a \text{ divise } k, \end{array} \right. \Rightarrow p \text{ divise } a.$$

(3) Si n est premier alors $\sqrt{n}$ est un nombre irrationnel.

Supposons par l'absurde que: $\sqrt{n}$ est un nombre rationnel,

$\Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{N}^*, (a \wedge b) = 1$ et $\sqrt{n} = \frac{a}{b} \Rightarrow n = \left(\frac{a}{b}\right)^2$,
$\Rightarrow n \cdot b^2 = a^2 \Rightarrow n$ divise a,
$\Rightarrow n$ divise a car n premier,
$\Rightarrow a = k \cdot n$, $k \in \mathbb{N}$,
$\Rightarrow b^2 = n \cdot k^2 \Rightarrow n$ divise b^2, mais n premier,
$\Rightarrow n$ divise b,
$\Rightarrow n \neq 1$ est un diviseur commun de a et b contradiction avec $(a \wedge b) = 1$,
$\Rightarrow \sqrt{n}$ est un nombre irrationnel.

(4) $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. Déduire que, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.

D'après (3) $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. Supposons que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est rationnel

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \left[\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \times \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\right] \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} - \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$.
La somme des deux nombres $(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ et $\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)$ donne que $2\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$,
$\Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ (contradiction).
Ce qui implique que: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.

Exercice 09: Montrons par récurrence:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}, 4^n + 6n - 1$ est un multiple de $9.(R_n)$

1ère étape: pour $n = 0$, $4^0 - (6 \times 0) - 1 = 0 = 0 \times 9$,
$\Rightarrow 4^0 - (6 \times 0) - 1$ est un multiple de 9
$\Rightarrow R_0$ est vraie.
2ème étape: On suppose que (R_n) est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé (l'hypothèse de récurrence), et montrons que (R_{n+1}) l'est aussi, c'est-à-dire:

$$4^{n+1} + 6(n+1) - 1 \text{ est un multiple de } 9.$$

En effet:
$4^{n+1} + 6(n+1) - 1 = 4 \times 4^n + 6n + -1 + 6 = 9k + 3 \times 4^n + 6$ (l'hypothèse de récurrence)
$= 9k + 3(9k - 6n + 1) + 6 = 9(k + 3k - 2n + 1)$,
$\Rightarrow 4^{n+1} + 6(n+1) - 1$ est un multiple de 9
$\Rightarrow (R_{n+1})$ est vraie.
Conclusion:

$$\forall n \in \mathbb{N}, 4^n + 6n - 1 \text{ est un multiple de } 9.$$

(2) $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^{n-1} \leq n! ... (R_n)$ avec $n! = 1 ... (n-1)(n-2)n$ et $0! = 1$.

1ère étape: pour $n = 1, 2^{1-1} = 2^0 = 1 \leq 1! = 1 \Rightarrow R_1$ est vraie.

2ème étape: Supposons que (R_n) est vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$ (l'hypothèse de récurrence), et montrons que (R_{n+1}) l'est aussi, c'est-à-dire:

$$2^n \leq (n+1)!.$$

En effet:

$$\begin{aligned} 2^n &= 2 \times 2^{n-1} \leq 2 \times n! \leq (n+1).n! = (n+1)!, \text{ car } n \geq 1, \\ &\Rightarrow (R_{n+1}) \text{ est vraie.} \end{aligned}$$

Conclusion:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^{n-1} \leq n!.$$

(3)$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} ... (R_n)$

1ère étape: pour $n = 1, \sum\limits_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1$ et $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1 \Rightarrow R_1$ est vraie.

2ème étape: Supposons que (R_n) est vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$, et montrons que (R_{n+1}) l'est aussi, c'est-à-dire:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{4}.$$

En effet:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4} + (n+1)^3, \\ &= (n+1)^2 \left[\frac{n^2}{4} + (n+1)\right] = (n+1)^2 \left[\frac{n^2+4n+4}{4}\right], \\ &= \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{4} \Rightarrow (R_{n+1}) \text{ est vraie.} \end{aligned}$$

Conclusion:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}.$$

* Calculons: $S = 1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + (2n+1)^3$.

$$\begin{aligned} S &= 1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + (2n+1)^3 = \sum_{k=1}^{2n+2} k^3 - \left(2^3 + 4^3 + 6^3 + ... + (2n+2)^3\right), \\ &= \frac{(2n+2)^2 (2n+3)^2}{4} - 2^3 \left(1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + (n+1)^3\right), \\ &= \frac{(2n+2)^2 (2n+3)^2}{4} - 2^3 \left(\frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{4}\right), \\ &= \left(2^2\right) \frac{(n+1)^2 (2n+3)^2}{4} - \left(2^3\right) \left(\frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{4}\right), \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} \left[4(2n+3)^2 - 8(n+2)^2\right], \\ &= (n+1)^2 \left[2n^2 + 4n + 1\right]. \end{aligned}$$

(4)$\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geq 1 + na ... (R_n)$

1ère étape: Si $n = 0$, $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1 \Rightarrow (1+a)^0 \geq 1 + 0 \times a$,
$\Rightarrow R_0$ est vraie.

2ème étape: Supposons que (R_n) est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé (l'hypothèse de récurrence), et montrons que (R_{n+1}) l'est aussi, c'est-à-dire:

$$(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)\,a.$$

En effet:

$$\begin{array}{rcl} (1+a)^{n+1} & = & (1+a)\,(1+a)^n \geq (1+na)\,(1+a) \;\; \text{(l'hypothèse de récurrence)}, \\ \text{mais} & : & (1+na)\,(1+a) = 1 + na + a + na^2 = 1 + (n+1)\,a + na^2, \\ & \geq & 1 + (n+1)\,a, \\ & \Rightarrow & (R_{n+1}) \;\; \text{est vraie.} \end{array}$$

Conclusion:

$$\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geq 1 + na.$$

(5) $\forall n \geq 1, (n+1)! \geq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k!. \quad (R_n)$

1ère étape: pour $n = 1, \displaystyle\sum_{k=1}^{1} k! = 1! = 1$ et $(1+1)! = 2$,

$\Rightarrow R_1$ est vraie.

2ème étape: Supposons que (R_n) est vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$, et montrons que (R_{n+1}) l'est aussi, c'est-à-dire:

$$(n+2)! \geq \sum_{k=1}^{n+1} k!.$$

En effet:

$$\begin{array}{rcl} (n+2)! & = & (n+2)\,(n+1)! \\ & \geq & (n+2) \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! \;\text{(d'après l'hypothèse de récurrence)} \\ & \geq & (n+2)\,[1! + 2! + ... + n!] \geq 1! + 2! + ... + (n+1+1)\,n! \\ & = & 1! + 2! + ... + n! + (n+1)! = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k!, \\ & \Rightarrow & (R_{n+1}) \;\; \text{est vraie.} \end{array}$$

Conclusion:

$$\forall n \geq 1, (n+1)! \geq \sum_{k=1}^{n} k!.$$

Exercice 10: A, B et C sont trois parties d'un ensemble$E$. Montrons que:

(1) $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$.

" $\Rightarrow$ " Montrons que:

$$A \cup B = A \cap C \Rightarrow B \subset A \subset C.$$

a) Montrons que: $B \subset A$.

$$\begin{array}{rcl} \text{Si} & : & x \in B \text{ alors } x \in A \cup B, \\ & \Rightarrow & x \in A \cap C \text{ d'après l'hypothèse,} \\ & \Rightarrow & x \in A \Rightarrow B \subset A. \end{array}$$

b) Montrons que: $A \subset C$.

$$\begin{array}{rcl} \text{Si } x & \in & A \text{ alors } x \in A \cup B \\ & \Rightarrow & x \in A \cap C \Rightarrow x \in A \text{ et } x \in C \Rightarrow A \subset C, \\ & \Rightarrow & B \subset A \subset C. \end{array}$$

" $\Leftarrow$ " Montrons que:

$$B \subset A \subset C \Rightarrow A \cup B = A \cap C.$$

a) Montrons que: $A \cup B \subset A \cap C$.

$$\begin{aligned} \text{Si} \quad &: \quad x \in A \cup B \text{ alors: } \left\{ \begin{array}{c} x \in A \Rightarrow x \in C \\ \text{ou } x \in B \Rightarrow x \in A \Rightarrow x \in C \end{array} \right. \\ &\Rightarrow \quad x \in A \cap C. \end{aligned}$$

b) Montrons que: $A \cap C \subset A \cup B$.

$$\text{si } \; x \in A \cap C \text{ alors } x \in A \Rightarrow x \in A \cup B.$$

(2) Montrons que:

$$A \subset B \Leftrightarrow C_E^B \subset C_E^A.$$

a) Montrons que:

$$A \subset B \Leftrightarrow C_E^B \subset C_E^A.$$

" $\Rightarrow$ "Si $x \in C_E^B$ alors $x \in E$ et $x \notin B$,

ce qui implique que: $x \in E$ et $x \notin A$ car $A \subset B \Rightarrow x \in C_E^A$.
" $\Leftarrow$ "Si $x \in A$ alors $x \notin C_E^A \Rightarrow x \notin C_E^B \Rightarrow x \in B$.