Université Aboubekr Belkaid-Tlemcen

Module : Mathématiques 1

1ère Année Sciences et technologies

Série de TD 01- Logique et raisonnements

Exercice 01 : Soit le nombre $A=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$, montrer que $A^3=4-3A$.

En déduire que A=1.

Exercice 02 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$a)\ |2x+1|<|5x-2| \quad b)|x^2-4|=x \quad b)\big|x+|x|\big|\geq 2$$

2. Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{cases} |x+y|\leq |x|+|y| \\ |x-y|\geq \big||x|-|y|\big| \end{cases}$$

Exercice 03 : Mettre sous forme d'intervalles (ou unions d'intervalles) les ensembles suivants :

$$A=\{x\in\mathbb{R};\ x^2\geq 4\ et\ x<5\}, B=\left\{x\in\mathbb{R}; \sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}=1\right\}$$

Exercice 04 : Soit n un entier naturel non nul.

- Calculer $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\ \ et\ \ \prod_{k=0}^{n}(-1)^k$
- Vérifier que $\frac{2}{k^2-1}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}$,puis calculer la valeur $U=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-1}$
- Calculer $V=\sum_{k=1}^{n}k\ k!\ et\ W=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$ (**Indication :** poser k=(k+1)-1)
- Développer $P(x)=(x+1)^n$ en utilisant le binôme de Newton. En déduire les valeurs des sommes : $S=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\ \ et\ T=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k$

Exercice 05 : Soient P,Q et R des propositions.

1) En utilisant la table de vérité, montrer que:

$$[(\bar{P}\Longrightarrow Q)\wedge R]\Leftrightarrow[(\bar{P}\vee\bar{R})\Longrightarrow(Q\wedge R)]$$

2) Sans utiliser la table de vérité, montrer que :

$$[(\bar{P}\vee Q)\wedge(P\vee\bar{Q})]\Leftrightarrow(P\Leftrightarrow Q)$$

3) La proposition $[(P\wedge Q)\Longrightarrow(\bar{P}\vee Q)]$ est-elle vraie ?

Exercice 06 : Ecrire, à l'aide de quantificateurs, les propositions suivantes :

1. Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
2. Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.
3. Il existe un entier multiple de tous les autres.
4. Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.

Exercice 07 :

1. Ecrire la négation et la contraposée de la proposition suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}; x \leq a \Longrightarrow y > b$$

2. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier

$$(P1): \forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n > m + 1$$
$$(P2): \quad \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$$
$$(P3): \quad \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$$

Exercice 08 : En utilisant un raisonnement par l'absurde, montrer que :

1) Si $x\ et\ y$ sont différents, alors les valeurs $(x+1)(y-1)\ et\ (x-1)(y+1)$ sont différents.
2) Pour tout entier naturel premier supérieur ou égal à 2, on a $\sqrt{n}$ est un irrationnel.
3) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ est un irrationnel .
4) Si $a\ et\ p$ sont deux entiers naturels, alors :

$$(p\ premier\ et\ p\ divise\ a^2) \Longrightarrow p\ divise\ a$$

Exercice 09 : Montrer par récurrence :

1) $\forall n \in \mathbb{N}, 4^n + 6n - 1\ est\ un\ multiple\ de\ 9$
2) $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^{n-1} \leq n!$
3) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, en déduire la valeurs de $S = \sum_{k=1}^{2n+1} k^3$
4) $\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geq 1 + na$
5) $\forall n \geq 1, (n+1)! \geq \sum_{k=1}^{n} k!$

Exercice 10 : Soient $A, B\ et\ C$ trois parties d'un ensemble E. Montrer que :

1. $(A \cup B = A \cap C) \Longleftrightarrow (B \subset A \subset C)$
2. $(A \subset B) \Longleftrightarrow (C_E^B \subset C_E^A)$