Université Abou Bakr Belkaïd Tlemcen — A.U. 2019-2020
Faculté des Sciences — Module : Math 1
Tronc Commun SM

TD.N°3 : Fonction réelle d'une variable réelle : Limites, continuité et dérivabilité.

Exercice 1.
Déterminer le domaine de définition, puis étudier la parité de chacune des fonctions suivantes :
1) $f(x) = \left|\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right|$, 2) $g(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.

Exercice 2.
Les fonctions suivantes sont-elles minorées ? majorées ? dans le cas affirmatif, déterminer un majorant et/ou un minorant :
1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $f(x) = -2\sin(x^2+2x-1)$, 2) $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$,
3) $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $h(x) = \dfrac{2}{3-\cos x}$, 4) $k :]0;5] \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $k(x) = \sqrt{x} - \dfrac{1}{1+x}$.

Exercice 3.
Soient $f, g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $h(x) = \sqrt{x^2+1}$, $g(x) = \ln(x + h(x))$, $f(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.
1) Vérifier que $h(x) + x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$ et montrer que $h(x) + x > 0$, $\forall \in \mathbb{R}$.
2) Déterminer $\mathcal{D}_h$, $\mathcal{D}_g$, $\mathcal{D}_f$.
3) Calculer $e^{g(x)}.e^{g(-x)}$, $f(x) - f(-x)$ et en déduire la parité de f, g.

Exercice 4.
1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$. (Utiliser le cercle trigonométrique).
En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin x}{1-\cos^2 x}$.
2) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$. (Utiliser $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln(1+t)}{t}$).
En déduire $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$, $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x}$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{x+1}$.
3) Calculer les limites suivantes, lorsqu'elles existent :
1) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2-3x+1}}{x}$, 2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{2x^2+4x-6}$, 3) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{x^2}$,
4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}$, 5) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{x+e^x}$, 6) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{-7}{2}} e^{\frac{-1}{x^2}}$.

Exercice 5.
Soient $f, g : \mathbb{R}\backslash\{-1,1\} \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$, $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$, $g(x) = \dfrac{x}{1-x}$.
1) Déterminer $f \circ g$, $g \circ f$ et étudier la parité de $f + g$ et $f.g$.
2) $\dfrac{f(x)}{x} = x^2$ admet-elle une racine sur $[\frac{1}{2}, 1]$.

Exercice 6.
1) Etudier la continuité des fonctions suivantes

$$f_1(x) = \begin{cases} 2x-4 & si\ x \le 0, \\ \frac{1}{2}x - 2 & si\ 0 < x < 4, \\ 2x^2 - 5x + 4 & si\ x \ge 4, \end{cases} \quad et \quad f_2(x) = \begin{cases} \ln(x^2+1) & si\ x \le 0, \\ \dfrac{e^x-1}{x^2+3} & si\ x > 0. \end{cases}$$

2) Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$, les fonctions suivantes sont-elles continues sur $\mathbb{R}$:

$$g_1(x) = \begin{cases} -x & si\ x \leq 0, \\ x^2 & si\ 0 < x < 1, \\ mx - 1 & si\ x \geq 1. \end{cases} \quad et \quad g_2(x) = \begin{cases} -x^2 + mx & si\ x \leq 2, \\ \sqrt{x-2} & si\ x > 2. \end{cases}$$

Exercice 7.

1) Soient $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$, f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Si oui, déterminer son prolongement.

2) Les fonctions suivantes peuvent-elles être prolongées par continuité au point 0.

$h_1(x) = x \cos \frac{1}{x}$, $\quad h_2(x) = \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x+4} - 2}$, $\quad h_3(x) = \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$, $\quad h_4(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 8.

1) Vérifier l'existence d'une racine dans $[0,1]$ de : $2x^3 + 3x - 2 = 0$.

2) Soit $x^4 + 5x^3 - x^2 + x - 1$.

Montrer que le graphe de g coupe l'axe $(x'ox)$ en $x_0 \in]0,1[$.

Exercice 9.

En utilisant la définition de la dérivée, calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$, $\quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x}$, $\quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$, $\quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$, $\quad \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin \pi x}{x - 1}$, $\quad \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2 - x}{x^n - 2}$.

Exercice 10.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 2 & si\ x \leq 0, \quad a, b \in \mathbb{R} \\ ax + b & si\ x > 0, \end{cases}$$

1) Déterminer $C = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2; f \text{ continue sur } \mathbb{R}\}$ et $D = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2; f \text{ dérivable sur } \mathbb{R}\}$.

2) Pour $(a,b) \in D$, calculer $f'(x)$ et étudier sa continuité. f est-elle de classe $C^1(\mathbb{R})$.

Exercice 11.

1) Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes au point x_0 :

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(\pi x)}{x-1}, & si\ x \neq 1, \quad x_0 = 1, \\ 0 & si\ x = 1, \end{cases} \quad et \quad f_2(x) = \sqrt{|x-2|}, \quad x_0 = 2.$$

2)

$$g(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x} & si\ x \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}^*. \\ 0 & si\ x = 2, \end{cases}$$

i) Etudier suivant les valeurs de n, la continuité et La dérivabilité de f.

ii) Ensuite la continuité de la fonction dérivée f'.

Exercice 12.

1) Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

$f_1(x) = e^{\cos(\sin x)}$, $\quad f_2(x) = \ln(\ln x)$, $\quad f_3(x) = x^x$, $\quad f_4(x) = \tan\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$, $\quad f_5(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$,

$f_6(x) = \left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right)^4$, $f_7(x) = \arcsin(\sqrt{x^2 - 1})$, $f_8(x) = \dfrac{\arctan(x^2+1)}{x^2+1}$, $f_9(x) = \dfrac{1 + \cosh(x^2)}{\sinh x}$.

2) Déterminer les dérivées secondes des fonctions suivantes :

$g_1(x) = \arccos(\ln x)$, $\quad g_2(x) = (x^3 + x^2 + 1)e^{-2x}$, $\quad g_3(x) = (\arctan x)^2$.

3) Déterminer les dérivées d'ordre n : $h_1(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $\quad h_2(x) = xe^x$.

Exercice 13.
En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que,

$$\forall x>0, \frac{1}{x+1} < \ln(x+1)-\ln(x) < \frac{1}{x}.$$

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\big(\ln(x+1)-\ln(x)\big)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x\big(\ln(x+1)-\ln(x)\big)$.
En déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(1+\dfrac{1}{x}\big)^x = e$.

Exercice 14.
1) Calculer les expressions suivantes :
$\sin\big(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\big)+\cos\big(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\big)$, $\arcsin\big(\sin\frac{\pi}{6}\big)$, $\arcsin\big(\sin\frac{5\pi}{6}\big)$, $\arccos\big(\cos\frac{\pi}{6}\big)$, $\arcsin\big(\sin\frac{7\pi}{6}\big)$.
2) Simplifier
$\sin(2\arcsin x)$, $\sin(2\arccos x)$, $\cos(2\arcsin x)$, $\cos(2\arccos x)$, $\sin(2\arctan x)$, $\cos(2\arctan x)$.
3) Calculer : $A=\cos\big(\arccos\frac{1}{3}+\arcsin\frac{1}{2}\big)$, $B=\sin\big(\arccos\frac{1}{4}+\frac{\pi}{4}\big)$.
4) Résoudre dans $\mathbb{R}$:
$\arcsin x = \arcsin\frac{2}{5}+\arcsin\frac{3}{5}$, $\quad \arccos x = 2\arccos\frac{3}{4}$.
$\arctan x = 2\arctan\frac{1}{2}$, $\quad$ (Utiliser $\tan(a+b)$).
$\arcsin x = \arccos\frac{1}{3}+\arccos\frac{1}{4}$, $\quad$ (Utiliser $\sin(a+b)$).

Exercice 15.
Montrer que
1)$\forall x\in[-1,1]$: $\arccos x+\arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$.
2)

$$\arctan x+\arctan\frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & si\ x>0,\\ \frac{-\pi}{2}, & si\ x<0.\end{cases}$$

3) $\forall x<1$: $\arctan\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)-\arctan x = \dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 16.
1) Enoncer les théorèmes de Rolle et des accroissements finis.
2) Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
On définit la fonction auxilliaire $\Theta(x)$ de telle sorte que :
$\forall x\in[a,b]:\Theta(x)=f(x)-f(a)-A(x-a)$, où A est le réel constant tel que $\Theta(a)=\Theta(b)=0$.
i) Déterminer la constante A.
ii) Est ce que Θ satisfait les hypothèses du théorème de Rolle entre a et b ?
iii) En déduire qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que : $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
3) Application : En appliquant le théorème des accroissements finis à $f(x)=\arctan x$ sur $[1,\frac{4}{3}]$, montrer que $\frac{\pi}{4}+\frac{3}{25}<\arctan\frac{4}{3}<\frac{\pi}{4}+\frac{1}{6}$.

Exercice 17.
En appliquant la règle de l'Hopital, calculer les limites suivantes :
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$, $\quad\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}$, $\quad\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$, $\quad\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^e}$, $\quad\lim\limits_{x\to 0}\Big(\dfrac{2}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{1-\cos x}\Big)$.