Université Abou Bakr Belkaïd Tlemcen
Faculté des Sciences
Tronc Commun SM

A.U. 2019-2020
Module : Math 1

TD.N°2 : Applications et Relations

Exercice 1.
Soit $f : E = \{1, 2, 3, 4\} \longrightarrow F = \{0, 1, 3, 5, 7, 10\}$ une application définie par son graphe $G = \{(1, 3), (2, 5), (3, 5), (4, 0)\}$.

1. Vérifier que f est bien une application.
2. f est-elle injective ?, surjective ?.
3. Déterminer $f(4)$, $f(\{4\})$, $f(\{1, 2, 3\})$, $f(E)$.
4. Déterminer $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{5\})$, $f^{-1}(\{0, 1, 3\})$, $f^{-1}(\{5, 7, 10\})$, $f^{-1}(\{1, 10\})$.

Exercice 2.
Considérrons les deux parties de $\mathbb{R}$, $E = [0, 1]$ et $F = [0, 2]$.
$f : E \longrightarrow F$ tel que $f(x) = 2 - x$, $\quad g : F \longrightarrow E$ tel que $g(x) = (x - 1)^2$.

1. Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$. A-t-on $g \circ f = f \circ g$? et $g \circ f = g$?
2. Déterminer $f^{-1}(\{0\})$ et $g^{-1}(]0, \frac{1}{2}[)$.
3. Montrer que $g \circ f$ est bijective et préciser $(g \circ f)^{-1}$.

Exercice 3.
Soient

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, f(x) = 2x \qquad et \qquad g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & x \text{ pair}, \\ 0 & x \text{ impair}. \end{cases}$$

1. Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$.
2. f et g sont-elles injectives ?, surjectives ?, bijectives ?.

Exercice 4.
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow]-1, 1[$ tel que $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$.
Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Exercice 5.
La partie suivante de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:$\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 3), (3, 4), (4, 3)\}$ définit-elle sur $\mathbb{N}$ une relation transitive, symétrique, réflexive ?
Si elle n'est pas transitive, la compléter pour avoir une relation transitive.

Exercice 6.
On définit sur $\mathbb{R}$, la relation $\mathcal{R}$ par : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer $cl(0)$, $cl(1)$, $cl(a)$, $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 7.
$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 14, 17\}$
Montrer que l'on définit une relation d'équivalence dans E, en posant $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \dfrac{x + y}{2} \in \mathbb{N}$. Et trouver les classes d'équivalence.

Exercice 8.
On définit sur $\mathbb{N}^*$, la relation $\mathcal{R}$ par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* : y = x^n$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.
2. Cet ordre est-il total ?

Exercice 9.
Soit $\ll$ la relation définie sur $\mathbb{N}^2$ par :

$$(a,b) \ll (a',b') \Leftrightarrow \begin{cases} a < a', \\ ou \\ a = a' \ et \ b \leq b'. \end{cases}$$

Montrer que $\ll$ est une relation d'ordre total.

Exercices supplémentaires :

Exercice 10.
Les applications suivantes sont-elles injectives ?, surjectives ?, bijectives ?.
$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, f(n) = n+1, \quad g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, g(n) = n+1, \quad h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, h(x,y) = (x+y, x-y).$

Exercice 11.
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{*+}$ tel que $f(x) = \dfrac{e^x + 2}{e^{-x}}$.
Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Exercice 12.
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

1. f est-elle injective ?, surjective ?
2. Montrer que, $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
3. Montrer que, $g = f|_{[-1,1]} : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1]$, $g(x) = f(x)$ est bijective.

Exercice 13.

1. Déterminer une bijection de $\mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$.
2. Déterminer une bijection de $E = \{\dfrac{1}{n}, n \geq 1\} \longrightarrow F = \{\dfrac{1}{n}, n \geq 2\}$.

Exercice 14.
Dans $\mathbb{R}^2$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par : $(x,y)\mathcal{R}(x',y') \Leftrightarrow x = x'$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer $cl(1,2)$.

Exercice 15.

1. Montrer que la relation de congruence modulo n :
   $a \equiv b[n] \Leftrightarrow n$ divise $b - a$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{Z}$.
2. En utilisant la division euclidienne, montrer qu'il existe exactement n classes d'équivalence distinctes.