Université Abou Bakr Belkaïd Tlemcen
Faculté des Sciences
Tronc Commun SM

A.U. 2019-2020
Module : Math 1

TD.N°1 : Logique et Ensembles

Exercice 1.
Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble. Peut-on écrire ?
1) $a \in E$, 2) $b \subset E$, 3) $\{c\} \subset E$, 4) $\emptyset \in E$, 5) $\emptyset \subset E$, 6) $\{\emptyset\} \subset E$.

Exercice 2.
Soient $A =]-\infty, 3]$, $B =]-2, 7[$ et $C =]-5, +\infty, 3[$, trois parties de $\mathbb{R}$.
Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap C$, $B \cup C$, $\bar{A} = A^C = \mathbf{C}_{\mathbb{R}}^{A}$, $A \backslash B$, $A^C \cap B^C$, $\Big(A \cup B\Big)^C$, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cap (B \cup C)$.

Exercice 3.
Mettre sous forme d'intervalles les ensembles suivants :
$A = \{x \in \mathbb{R} /\ |x + |x|| \geq 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} /\ x^2 \leq 4\ et\ x^2 \neq 1\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} /\ \sqrt{x+1} \leq 1\}$ et $D = \{x \in \mathbb{R} /\ 1 \leq x^2 \leq 2\}$.

Exercice 4.
1) En utilisant la table de vérité, montrer que la proposition :
$\Big[(P \Rightarrow Q) \wedge (\bar{P} \Rightarrow Q)\Big] \Rightarrow Q$ est toujours vraie.
<u>Application :</u> Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $n(n+1)$ est pair.
2) Sans utiliser la table de vérité montrer que.
$\Big[(\bar{P} \Rightarrow Q) \wedge R\Big] \Leftrightarrow \Big[(\bar{P} \vee \bar{R}) \Rightarrow (Q \wedge R)\Big]$.
3) La proposition : $P \wedge Q \Rightarrow \bar{P} \vee Q$ est-elle vraie ?

Exercice 5.
1) Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Montrer que :
$\forall \epsilon > 0$, on a, $a \leq \epsilon \Rightarrow a = 0$.
2) Si on a, $a = 0.999... \Rightarrow a = 1$.
3) Trouver l'erreur :
Soit $a = 1$, on a, $a^2 = a$ et $a^2 - 1 = a - 1$ d'où $(a-1)(a+1) = a - 1$ donc $a + 1 = 1$ et alors $2 = 1$.

Exercice 6.
On appelle les nombres triangulaires, les sommes $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ et les nombres pyramidaux, les sommes $P_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} U_k$.
1) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $P_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$.
2) En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} e^{k^2}$.

Exercice 7.
Soit $n \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq 2$, on a la proposition.
$P : n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8 $\Rightarrow n$ est pair.
1) Définir la contraposée de P.
2) Démontrer qu'un entier naturel impair n s'ecrit sous la forme $n = 4k + r$ avec $k \in \mathbb{N}$, $r \in \{1, 3\}$.
3) Prouver la contraposée de P. Que peut on conclure ?

Exercice 8.
En utilisant un raisonnement par l'absurde, montrer que :
1) La longueur d'un rectangle d'aire égale à $170cm^2$ est supérieur à $13m$.
2) Soient $a, b \in \mathbb{R}$) on a $a \neq -1$ et $b \neq -1 \Rightarrow a + b + ab \neq -1$.
3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\sqrt{n^2+1} \in \mathbb{N}$.

Exercices supplémentaires :

Exercice 9.
Considérons les propositions suivantes :
$P : \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R};\ x + y > 0, \quad Q : \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R};\ x + y > 0.$
$R : \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R};\ x + y > 0, \quad S : \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R};\ y^2 > x.$
Vérifier, si ces propositions sont vraies ou fausses et déterminer leurs négations.

Exercice 10.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
1) Montrer que n^3 pair $\Rightarrow n$ est pair.
2) Montrer par l'absurde que $\sqrt[3]{4}$ est irrationnel.
3) Montrer que si $r \in \mathbb{Q}^*$ et $x \in \mathbb{Q}$ alors $rx \in \mathbb{Q}$.
4) En déduire que $\sqrt[3]{\dfrac{32}{27}}$ est irrationnel.

Exercice 11.
1) Démontrer par récurrence que $\forall n \geq 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
2) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \Big(\sum_{k=1}^{n} k\Big)^2$.
3) En déduire la somme des cubes des n premiers nombres impairs.

Exercice 12.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{1}{k})^k$.
1) Calculer P_1, P_2, P_3.
2) Montrer que $P_n = \dfrac{(n+1)^n}{n!}$, en utilisant :
i) Une démonstration par récurrence. ii) Calcul direct.

Exercice 13.
Soit $x \in \mathbb{R}^{*+}$. Montrer par récurrence que :
1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.
2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1 - x_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k$, où $x_i \in [0, 1]$, $i = \overline{1, n}$.