Université Abou Bakr Belkaïd Tlemcen — A.U. 2019-2020
Faculté des Sciences — Module : Math 1
Tronc Commun SM

TD.N°0 : Généralités

Exercice 1.
Mettre sous forme de fraction irréductible les expressions suivantes :

$$A = \frac{51}{136}, \quad B = \frac{1015}{2450}, \quad C = \frac{9}{40} + \frac{9}{50} + \frac{18}{125}.$$

Exercice 2.
Simplifier les expressions suivantes :
1) $A = \sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{2^5}$, 2) $B = \left(\sqrt[6]{3}\right)^3$, 3) $C = \sqrt[5]{3}.\sqrt[3]{9}.\sqrt[15]{3^2}$, 4) $D = \ln(\sqrt{3}+1) + \ln(\sqrt{3}-1)$,
5) $E = \ln(\sqrt{3}+1)^{18} + \ln(\sqrt{3}-1)^{18}$, 6) $F = \dfrac{\ln(2x)}{\ln x}$ $(x \neq 1)$, 7) $H = \dfrac{1}{e}\left(e^{(x+1)^2 - e^{2\ln x}}\right)$.

Exercice 3.
1. Soit $x > 0$. Comment choisir x pour que l'on ait :
$x^2 > 10000$, $\dfrac{1}{x^2} < 10^{-6}$, $x^2 < 0.0001$.
2. Soit $t < 0$. Comment choisir t pour que l'on ait :
$t^2 > 10000$, $t^2 < 0.0001$, $\dfrac{1}{t} < -0.001$.
3. Calculer, -$\dfrac{1}{n^{-\frac{2}{3}}}$ pour $n = 10^{45}$.

Exercice 4.
1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, les equations suivantes :
1) $x^2 - 5x + 3 = 0$, 2) $x^2 + x + \dfrac{1}{4} = 0$, 3) $e^x - 2 + e^{-x} = 0$, 4) $x^2 - x - m = 0$, $m \in \mathbb{R}$,
5) $m^2x^2 + mx + m - 1 = 0$, 6) $x^4 + 3x^2 = m$, $m \in \mathbb{R}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$, les equations suivantes :
1) $z^2 + z + 1 = 0$, 2) $z^4 - 2z^2\cos 2\alpha + 1 = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 5.
1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'equation : $x(x^2+3) = 4$.
2. Vérifier que $a^3 + b^3 = (a+b)\left((a+b)^2 - 3ab\right)$.
3. Montrer que $t = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ est un entier.
<u>Indication :</u> Poser $a = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$, $b = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$, calculer $a^3 + b^3$ et $a.b$.
4. En posant $q(x) = (x-a)(x-b)$, trouver des expressions plus simples de a et de b.
<u>Indication :</u> Développer $q(x)$ et résoudre $q(x) = 0$.

Exercice 6.
1) Développer $P(x) = (x+1)^n$ en utilisant la formule du *binôme de Newton*.
2) Calculer $S = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$ et $T = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$.

3) Dériver $P(x)$ et en déquire que $U = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k$.

4) Trouver une méthode similaire pour calculer $V = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k$.

Exercice 7.
1) En utilisant, $\dfrac{2}{k^2-1} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k+1}$, calculer $U = \sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k^2-1}$.

2) En utilisant, $k = (k+1) - 1$, calculer $V = \sum_{k=1}^{n} kk!$ et $W = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{(k+1)!}$.

Exercices supplémentaires :

Exercice 8.
On appelle le nombre d'or, la racine positive α de l'equation : $x^2 - x - 1 = 0$.
1. Déterminer α et montrer que $\alpha = \sqrt{1+\alpha}$ et que $\dfrac{3}{2} < \alpha < 2$.
2. Exprimer α^2, α^3, α^4, $\dfrac{1}{\alpha}$, $\dfrac{1}{\alpha^2}$ et $\dfrac{1}{\alpha^4}$ en fonction de α.

Exercice 9.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $P(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$.
1. Factoriser $P(x)$ par $x - 1$.
2. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $P(x) < 0$.

Exercice 10.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser les equations suivantes :
1) $\dfrac{n^2-1}{6} - \dfrac{n+1}{6}$, 2) $\dfrac{(n-2)(n+1)}{4} + \dfrac{4(n+1)}{3}$ 3) $\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6} - \dfrac{(n+1)^2}{4}$
4)$-\dfrac{1}{n(n+1)}\Big[\Big(\dfrac{n(n+1)}{2}\Big)^2 - \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\Big]$.

Exercice 11.
Soit la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots.. + q^n, \quad q \neq 1$.

1) Calculer $S_n - qS_n$ et en déduire que $S_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

2) En déduire que $b^n - a^n = (b-a)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.

<u>Indication :</u> Poser $q = \dfrac{a}{b}$ dans S_{n-1}.

Exercice 12.
1) Calculer les sommes : $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{9.2^k}{3^{k+1}}$, $\sum_{k=0}^{n}(3k+2)$, $\sum_{k=0}^{n}(n-k)$.

2) Calculer les produits : $\prod_{k=1}^{n} 2k$, $\prod_{k=1}^{n} \dfrac{2k+1}{2k-1}$, $\prod_{k=2}^{n} \dfrac{k^2-1}{k}$.