Université Abou Bakr Belkaïd Tlemcen — Année 2019-2020
Faculté des Sciences — Module : Math 1
Tronc Commun SM — Durée : 1h30 mn

Examen Final S1[1]

Exercice 1. $5pts$

1. Rappeler la somme $\sum_{k=1}^{n} k = \dots$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$.

i) Calculer S_1, S_3, T_2, T_4.

ii) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^* : S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

iii) En déduire T_n.

Exercice 2. $4pts$

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f, (D_f).
2. Calculer $\lim_{x \to 0} f(x)$.
3. f est-elle prolongeable par continuité en 0. Si oui, déterminer son prolongement.

Exercice 3. $5pts$

Soit $h : [0, +\infty[\longrightarrow [1, +\infty[$ tel que $h(x) = \sqrt{1+x^2}$.

1. Déterminer $h(\mathbb{R}^+)$ et $h^{-1}(\{\sqrt{2}\})$.
2. Montrer que h est injective.
3. h est-elle surjective ?
4. h est-elle bijective ? Si oui, déterminer h^{-1}.

Exercice 4. $6pts$

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2+1} > x$.
2. Déterminer le domaine de définition de la fonction f, (D_f).
3. Calculer $f(-x) + f(x)$ et en déduire la parité de f.
4. Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
5. Calculer $f'(x)$ et en déduire que f est strictement décroissante.

---

1. Une attention particulière sera accordée à la précision et à la clarté de votre rédaction.

5 pts

Exercice 1

1) $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ 0,5

2) $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 1.2+2.3+\dots+n(n+1)$, $T_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+\dots+n^2$.

i) $S_1 = \sum_{k=1}^{1} k(k+1) = 1.2 = 2$ 0,25 $S_3 = \sum_{k=1}^{3} k(k+1) = 1.2+2.3+3.4 = 20$ 0,25

$T_2 = \sum_{k=1}^{2} k^2 = 1^2+2^2 = 5$ 0,25 $T_4 = \sum_{k=1}^{4} k^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2 = 30$ 0,25

ii) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ par récurrence.

. $n=1$: $S_1 = 2 = \frac{1(1+1)(1+2)}{3} = 2$. 0,5

. Supposons que $S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ et montrons que $S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$ 0,5

$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \underbrace{1.2+2.3+3.4+\dots+n(n+1)} + (n+1)(n+2)$

$= S_n + (n+1)(n+2)$ 1

$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)+3(n+1)(n+2)}{3}$

$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$. 0,5

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

iii) $S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$ 0,25 $= \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k. = T_n + \sum_{k=1}^{n} k$ 0,25

d'où $T_n = S_n - \sum_{k=1}^{n} k$ 0,25 $= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2}$.

$T_n = \frac{2n(n+1)(n+2) - 3n(n+1)}{6} = \frac{n(n+1)[2(n+2)-3]}{6}$

$T_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \sum_{k=1}^{n} k^2$ 0,25

Exercice 2 4 pts

$f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

0,5

1) $D_f = \{x\in\mathbb{R},\ 1+x\geq 0,\ 1-x\geq 0$ et $x\neq 0\} = \{x\in\mathbb{R},\ x\geq -1,\ x\leq 1$ et $x\neq 0\}$

$D_f = [-1,1]\setminus\{0\} = [-1,0[\,\cup\,]0,1]$. 1

2) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$ 0,5

$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = 1 = \lim_{x\to 0} f(x)$

1

③ $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ (finie) $\Rightarrow$ f est prolongeable par continuité en 0 et son prolongement est défini par : $\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \ (x \in [-1,1] \setminus \{0\}) \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ 0,5 0,5

Exercice ③

$h : [0,+\infty[\to [1,+\infty[,\ h(x) = \sqrt{1+x^2}$.

① $h(\mathbb{R}^+) = \{h(x), x \in \mathbb{R}^+\}$ 0,5

$x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+1 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} \geq 1 \Rightarrow h(x) \geq 1$

d'où $h(\mathbb{R}^+) = [1,+\infty[$ 0,5

$h^{-1}(\{\sqrt{2}\}) = \{x \in \mathbb{R}^+, h(x) = \sqrt{2}\}$ 0,5

$h(x) = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{x^2+1} = \sqrt{2} \Rightarrow x^2+1 = 2 \Rightarrow x^2 = 1$

$\Rightarrow |x| = 1$

$h^{-1}(\{\sqrt{2}\}) = \{1\}$ 0,5 $\Rightarrow x = 1 \quad (x \in \mathbb{R}^+)$

② h est injective $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. 0,25

soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt{x_1^2+1} = \sqrt{x_2^2+1} \Rightarrow x_1^2+1 = x_2^2+1$

$\Rightarrow x_1^2 = x_2^2$

$\Rightarrow |x_1| = |x_2|$ 0,25

$\Rightarrow x_1 = x_2$ car $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$

$\Rightarrow$ h est injective. 0,5

③ h est surjective $\Leftrightarrow \forall y \in [1,+\infty[, \exists x \in \mathbb{R}^+ ; y = f(x)$ 0,25

soit $y \in [1,+\infty[$, cherchons $x \in \mathbb{R}^+ : y = f(x)$

$y = f(x) = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow y^2 = x^2+1$

$\Rightarrow x^2 = y^2 - 1$ 0,25

$\Rightarrow |x| = \sqrt{y^2-1}$ car $y \geq 1$

$\Rightarrow x = \sqrt{y^2-1}$ 0,5 (car on cherche $x \in \mathbb{R}^+$)

$\forall y \in [1,+\infty[, \exists x = \sqrt{y^2-1} \in \mathbb{R}^+ ; y = f(x)$ ie f est surjective.

Remarque: $h(\mathbb{R}^+) = [1,+\infty[\Rightarrow$ h est surjective.

④ Comme h est injective et surjective, alors h est bijective. 0,5

h admet une application réciproque h^{-1} définie par :

$h^{-1} : [1,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$

$y \longmapsto x = h^{-1}(y) = \sqrt{y^2-1}$ 0,5

$\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in [1,+\infty[: y = h(x) \Leftrightarrow x = h^{-1}(y)$

Exercice (4)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$

(1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2+1} > x$.

. Si $x \leq 0$ alors $\sqrt{x^2+1} > 0 \geq x$ ie : $\sqrt{x^2+1} > x$. 0,5

. Si $x > 0$: $\sqrt{x^2+1} > x \Leftrightarrow x^2+1 > x^2 \Leftrightarrow 1 > 0$ qui est tjs vraie. 0,5

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2+1} > x$.

(2) $D_f = \{x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2+1} - x > 0\} = \mathbb{R}$ d'après (1) 0,25 0,25

(3) Soit $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$.

$f(-x) = \ln(\sqrt{(-x)^2+1} - (-x)) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$ 0,5

$f(-x) + f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x) + \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$

$= \ln[(\sqrt{x^2+1} + x)(\sqrt{x^2+1} - x)]$

$= \ln(x^2+1 - x^2) = \ln 1 = 0$ 0,5

$f(-x) + f(x) = 0 \Rightarrow f(-x) = -f(x)$

$\Rightarrow f$ est impaire. 0,5

(4) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \ln(\sqrt{x^2+1} - x) = +\infty$ 0,5

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(\sqrt{x^2+1} - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left[\dfrac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x}\right]$ 0,5

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1} + x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left[\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}\right]$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(\sqrt{x^2+1} + x) = -\infty$ 0,5

(5) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = \dfrac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1}{\sqrt{x^2+1} - x} = \dfrac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1} - x)} = -\dfrac{\cancel{\sqrt{x^2+1} - x}}{\sqrt{x^2+1}(\cancel{\sqrt{x^2+1} - x})}$ 0,5

$f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. 0,5

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} < 0 \Rightarrow f$ est strictement décroissante. 0,25 0,25