Table des Matières

.

Chapitre 1

Fonctions numériques d'une variable réelle.(MESSIRDI BACHIR)

1.0.1 Définitions et propriétés

Définition d'une fonction

Définition 1.1 *On appelle* ***fonction numérique réelle,*** *sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$, toute application de E dans $\mathbb{R}$. On note l'ensemble de ces fonctions par: $F(E, \mathbb{R})$. Et on la note:*

$$\begin{array}{rcl} f & : & E \to \mathbb{R} \\ x & \to & f(x). \end{array}$$

où E s'appelle l'ensemble de départ.

Exemple 1.1 *Soit la fonction définie par:*

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x & \to & f(x) = \sqrt{x}. \end{array}$$

Ensemble de définition

L'ensemble de définition d'une fonction est les élément de l'ensemble de départ où la fonction à un sens ou dire qu'elle est bien définie qu'on le note par D_f.

Exemple 1.2 *(1)* $f(x) = \frac{1}{x}, D_f = \{x \in \mathbb{R}/x \neq 0\} = \mathbb{R}^*$.

(2) $f(x) = \sqrt{x}, D_f = \{x \in \mathbb{R}/x > 0\} = \mathbb{R}_+$.

(3) $f(x) = \ln x, D_f = \{x \in \mathbb{R}/x > 0\} = \mathbb{R}_+$.

(4) $f(x) = \cos x, D_f = \mathbb{R}$.

(5) $f(x) = e^x, D_f = \mathbb{R}$.

Égalité de deux fonctions

Deux fonctions f et g définies de $E \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont égales si $f(x) = g(x)$ pour tout x élément de E.

Propriétés

(1) Pour chaques deux fonctions f et g définies de $E \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors on a:

$$\forall x \in E, (f+g)(x) = f\ (x) + g(x).$$

(2) Soit la fonction f définie de $E \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$ alors on a:

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

Fonction majoré-minorée et bornée

Définition 1.2 *Une fonction f est dite **majorée** dans E s'il existe une constante $M \in \mathbb{R}$ qui vérifie:*

$$\forall x \in E, f(x) \leq M.$$

Exemple 1.3 *La fonction:*

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad [1, +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \quad &\to \quad f(x) = \frac{1}{x} \text{ est majorée par } 1. \end{aligned}$$

Définition 1.3 *Une fonction f est dite **minorée** dans E s'il existe une constante $m \in \mathbb{R}$ qui* *vérifie:*

$$\forall x \in E, m \leq f(x).$$

Exemple 1.4 *La fonction:*

$$\begin{aligned} f &: \ ]0,1] \to \mathbb{R} \\ x &\to f(x) = \frac{1}{x} \text{ est minoée par } 1. \end{aligned}$$

Définition 1.4 *Une fonction f est dite* ***bornée*** *dans E si elle est majorée et minorée à la fois.*

Exemple 1.5 *La fonction:*

$$\begin{aligned} f &: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\to f(x) = \sin x \text{ est minoée par } -1 \text{ et majorée par } 1. \end{aligned}$$

1.0.2 La monotonie d'une fonction (croissance-décroissance et constante)

L'étude de la monotonie d'une fonction est de dire si elle est croissante ou décroissante dans un ensemble E.

La croissance

Définition 1.5 *Une fonction f est dite* ***croissante*** *dans E si et seulement si:*

$$\forall x_1, x_2 \in E; x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

et elle est ***strictement croissante*** *si:*

$$\forall x_1, x_2 \in E; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Exemple 1.6 *La fonction:*

$$\begin{aligned} f &: \ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x &\to f(x) = \sqrt{x} \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

La décroissance

Définition 1.6 *Une fonction f est dite **décroissante** dans E si et seulement si:*

$$\forall x_1, x_2 \in E; x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

*et elle est **strictement décroissante** si:*

$$\forall x_1, x_2 \in E; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Exemple 1.7 *La fonction:*

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}_- \to \mathbb{R} \\ x &\to f(x) = x^2 \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_-. \end{aligned}$$

Définition 1.7 *Une fonction **monotone (resp. strictement monotone)** est une fonction qui est ou bien croissante ou bien décroissante (resp. strictement croissante ou bien strictement décroissante), mais surtout pas les deux car si une fonction dans un ensemble E est croissante et à la fois décroissante alors la répense est ni croissante ni décroissante.*

Fonction constante

Définition 1.8 *Une fonction f est dite **constante** dans E si et seulement si:*

$$\forall x_1, x_2 \in E; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

1.1 Fonction périodique

Définition 1.9 *Une fonction f est dite **périodique** dans E de période T si et seulement si:*

$$\exists T > 0; \forall x \in E; f(x+T) = f(x).$$

Exemple 1.8 *(1) La fonction $f(x) = \cos x$ est une fonction périodique de période 2π.*

(2) La fonction $f(x) = \tan x$ est $\pi-$périodique.

1.2 Limite et continuété

Théorème 1.1 *La limite d'une fonction f en un point x_0 si elle existe alors elle est unique et elle est égale à la limite à droite et la limite à gauche. Et on écrit:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l.$$

1.2.1 Opéraion sur les limites

$\lim f(x)$	$l_1 \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0	0	0
$\lim g(x)$	$l_2 \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$l \in \mathbb{R}^*$	0
$\lim f+g$	$(l_1 l_2) \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F-I	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	l	0
$\lim f \times g$	$(l_1 l_2) \in \mathbb{R}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F-I	F-I	0	0
$\lim \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{l_1}{l_2} \in \mathbb{R}, l_2 \neq 0$	0	0	F-I	F-I	F-I	0	0	0	F-I

F-I: désigne une forme indéterminée.

Théorème 1.2 *Si on a $f(x)$ est une fonction bornée et $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, alors:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \times g(x) = 0.$$

Exemple 1.9

$$\lim_{x \to 0} x^2 \times \cos \frac{1}{x} = 0 \textit{ car: } \lim_{x \to 0} x^2 = 0 \textit{ et } -1 \leq \cos x \leq 1.$$

1.2.2 Continuété

Soit f une fonction définie en un point x_0 de E. On dit que f est **continue** en x_0 si et seulement si f est **continue** à droite et à gauche de x_0 c'est à dire:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Exemple 1.10

$$
\begin{aligned}
f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\
x &\to f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} \ si\ x \neq 0 \\ 1\ si\ x = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

alors puisque :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0) \ \textit{alors } f \textit{ est } \textbf{\textit{continue}} \textit{ en } 0.$$

et elle est continue dans $\mathbb{R}$, *car si* $x \neq 0$ *la fonction* $\frac{\sin x}{x}$ *est bien définie et elle est continiue.*

Propriétés des fonctions continues

Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ vérifie les propriétés suivantes:

(1) Atteint son minimum $m = \inf f(x)$et son maximum $M = \max f(x)$ pour $x \in [a, b]$.

(2) Elle est bornée dans $[a, b]$.

(3) Atteint au moins une fois toute valeur strictement comprise entre m et M.

Exemple 1.11 *La fonction:*

$$
\begin{aligned}
f &: [0, \pi] \to \mathbb{R} \\
x &\to f(x) = \cos x.
\end{aligned}
$$

est une fonction continue,bornée avec $\inf f(x) = -1$ *et* $\max f(x) = 1$, *ainsi que* $\cos x$ *prend toute les valeurs comprises entre* -1 *et* 1.

Lien entre les fonctions discontinues et les limites des suites

Théorème 1.3 *Soient* f *une fonction définie sur une partie* E *de* $\mathbb{R}$ *et* a *un point de* E. *Alors si la fonction* f *admet une limite* α *en un point* a *alors elle est unique de plus pour toute suite* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *telle que:*

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = a,$$

on trouve:

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \alpha.$$

Par contre si on peut trouver deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telles que:*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = a,$$

avec:

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f(y_n)$$

alors la fonction n'admet pas une limite au point a et elle est dite ***discontinue*** *en a.*

Exemple 1.12 *Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$ définie par: $f(x) = E[x]$ où $E[x]$ désigne la partie entière de x ($E[x] = \max\limits_{y\in\mathbb{Z}} y$; avec $y \leq x$).*

Exemple 1 *Montrons que f n'est pas continue en tout point de $\mathbb{Z}$.*

Soit $a \in \mathbb{Z}$, et considérons les deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par:$x_n = a - \frac{1}{n}$ et $y_n = a - \frac{1}{n}$.

On a:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} x_n &= \lim_{n\to+\infty} y_n = a \text{ avec } f(x_n) = a - 1 \text{ et } f(y_n) = a, \\ &\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f(y_n). \end{aligned}$$

donc f est discontinue en $a \in \mathbb{Z}$.

1.3 Théorème des valeurs intermédiares

Le théorème des valeurs intermédiares est un outil pour résoudre les équations de type:

$$f(x) = 0.$$

Théorème 1.4 (Théorème des valeurs intermédiares) *Soit f une fonction continue dans* *un intervalle* $[a, b]$ *avec* $a, b \in \mathbb{R}$*, telle que:*

$$f(a) \times f(b) < 0,$$

c'est à dire $f(a)$ *et* $f(b)$ *ont deux signes opposés. Alors il existe une constante* $\alpha \in]a, b[$ *tel que:*

$$f(\alpha) = 0.$$

Explication géométrique du théorème Si on a une fonction continue dans un intervalle $[a, b]$ avec l'un des deux images $f(a)$ et $f(b)$ se trouve au-dessus de l'axe des x et l'autre au-dessous de l'axe des x alors pour tracer une courbe de $f(a)$ vers $f(b)$, cette courbe doit au moins couper l'axe de x en un point $\alpha \in]a, b[$, ce qui affirme que $f(\alpha) = 0$.

Exemple 1.13 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par:* $f(x) = \cos\sqrt{x}$*. Montrons que l'équation:* $f(x) = 0$ *admet une solution dans* $]0, 10[$*. En effet, la valeur qui est prés de* 10 *tel que sont cos est connu est:* π^2*, alors* f *est continue et on a:* $f(\pi^2) = -1$ *et* $f(0) = 1 \Rightarrow f(\pi^2) \times f(0) < 0$*. D'après le théorème des valeurs intermédiares, il existe une constante* $\alpha \in \left]0, \pi^2\right[\subset]0, 10[$ *tel que:*

$$f(\alpha) = \cos\sqrt{\alpha} = 0.$$

Remarque 1.1 *On a la même chose si* $a = -\infty$ *ou* $b = +\infty$ *sauf au lieu d'écrire:* $f(a) \times f(b) < 0$ *on écrie:* $\left[\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)\right] \times \left[\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right] < 0$ *ou bien* $\left[\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)\right] \times f(b) < 0$*, ou bien* $f(a) \times \left[\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right] < 0$*.par suite on trouve le même résultat.*

1.4 Le prolongement par continuité

Supposons que f est une fonction définie dans $\mathbb{R} - \{a\}$. Alors comme question peut-on prolonger par continuété la fonction f sur $\mathbb{R}$? C'est à dire; existe elle une autre fonction qui dépend de la fonction f et qui est définie sur $\mathbb{R}$?(cela signifie le prolongement du domaine de définition et qui rend la fonction continue). Pour répondre à cette question on suit les démarches suivantes:

1ère étape: On calcul la limite de la fonction f au point a, par suite on a l'un des cas suivants:

1er cas: La limite est égale à l'infini, ç-à-d:

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \text{ ou bien } \lim_{x\to a} f(x) = +\infty.$$

Dans ce cas on dit que le prolongement par continuété n'existe pas au point a.

Exemple 1.14 *$f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ avec $f(x) = \frac{1}{x}$, on a:*

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \textit{ et } \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty,$$

le prolongement par continuété n'existe pas au point 0*.*

2ème cas: La limite à gauche de a est différente à la limite à droite de a, ç-à-d:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x).$$

La même chose on dit que le prolongement par continuété n'existe pas au point a.

Exemple 2 *$f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ avec $f(x) = \begin{cases} x\ln x \ \textit{si } x > 0 \\ \frac{\sin x}{x} \ \textit{si } x < 0 \end{cases}$*

$$\left[\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1\right] \neq \left[\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0\right],$$

ce qui donne que le prolongement par continuété n'existe pas au point 0*.*

3ème cas: Dans le calcul de la limite au point a on trouve deux limite ou plus, ce qui affirme que le prolongement par continuété n'existe pas au point a.

Exemple 1.15 *$f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ avec $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. La fonction cos est périodique et $\cos(\infty)$ n'existe pas, si on pose dans l'exemple:*

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{2n\pi} \textit{ et } y_n = \frac{1}{2n\pi + \pi} \textit{ alors } \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = 0, \\ \textit{mais } \left[1 = \lim_{n\to+\infty} f(x_n)\right] &\neq \left[\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = -1\right] \textit{ alors la limite n'existe pas,} \end{aligned}$$

donc le prolongement par continuété n'existe pas au point 0*.*

4ème cas: On trouve une limite constante unique:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \alpha.$$

Alors le prolongement par continuité existe.

2ème étape: Dans les trois premier cas le prolongement par continuété n'existe pas et là on termine la question. Mais dans le dernier cas le prolongement par continuité est de la forme:

$$\begin{aligned} F &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq a \\ \alpha \text{ si } x = a. \end{cases} \end{aligned}.$$

Alors dans ce cas la fonction F est définie dans $\mathbb{R}$ et elle est continue.

Exemple 1.16 *$f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ avec $f(x) = \frac{\sin x}{x}$*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

alors le prolongement par continuété de la fonction f existe et il est de la forme:

$$\begin{aligned} F &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \frac{\sin x}{x} \, si \; x \neq 0 \\ 1 \; si \; x = 0 \end{cases} \end{aligned}.$$

1.5 Dérivation d'une fonction réelle

1.5.1 Définition de la dérivée

Définition 1.10 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 un point de I, et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ continue en x_0. On dit que f **est dérivable en** x_0, s'il existe un nombre réel unique α tel que:*

$$\lim_{x \overset{>}{\to} x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \overset{<}{\to} x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha,$$

α est appelé la dérivée de f au point x_0 est noté $f'(x_0)$ .D'autre part si on pose: $x - x_0 = h$ alors on a:

$$\lim_{h \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \alpha.$$

De plus si on a:

$$\lim_{x \overset{>}{\to} x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha_1 \in \mathbb{R},$$

on dit que f est dérivable à droite de x_0 et si on a:

$$\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha_2 \in \mathbb{R},$$

on dit que f est dérivable à gauche de x_0.

La fonction est dérivable dans tout l'intervalle I quand elle est dérivable en tout point x_0 de I.

Exemple 1.17 *Trouver la dérivée de $f(x) = \sin x$ en utilisant la définition de la dérivée. En un point x_0:*

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} 2 \frac{\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)}{\left(\frac{x - x_0}{2}\right)} \times \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) \\
&= \cos x_0 \text{ , car: } \lim_{x \to x_0} \frac{\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)}{\left(\frac{x - x_0}{2}\right)} = 1,
\end{aligned}$$

alors $\forall x \in \mathbb{R}, (\sin x)' = \cos x$.

Proposition 3 *Si f n'est pas continue en un point x_0, alors elle n'est pas dérivable en ce point.*

1.5.2 Lien entre la dérivée et la monotonie

Proposition 4 *Si f est une fonction qui est dérivable dans un intervalle I alors on a les cas suivants:*

(1) $\forall x \in I, f(x) \geq 0,$ *alors* f *est une fonction croissante.*

(2) $\forall x \in I, f(x) > 0,$ *alors* f *est une fonction strictement croissante.*

(3) $\forall x \in I, f(x) \leq 0,$ *alors* f *est une fonction décroissante.*

(4) $\forall x \in I, f(x) < 0,$ *alors* f *est une fonction strictement décroissante.*

(5) $\forall x \in I, f(x) = 0,$ *alors* f *est une fonction constante.*

1.5.3 Quelques propriétés sur les fonctions dérivables

Proposition 5 *Etant donnés un intervalle* I *et deux fonctions* $f : I \to \mathbb{R}$ *et* $g : I \to \mathbb{R}$ *dérivables en un point* x_0 *de* I*, alors:*

1) $f + g$ *est dérivable en* x_0 *et* $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

2) $a \times f$ *est dérivable en* x_0 *et* $(a \times f)'(x_0) = a \times f'(x_0), \forall a \in \mathbb{R}$.

3) $f \times g$ *est dérivable en* x_0 *et* $(f \times g)'(x_0) = f'(x_0) \times g(x_0) + f(x_0) \times g'(x_0)$.

4) Si $g(x_0) \neq 0,$ *donc* $\frac{f}{g}$ *est dérivable en* x_0 *et* $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{[f'(x_0) \times g(x_0)] - [f(x_0) \times g'(x_0)]}{(g(x_0))^2}$.

1.5.4 Dérivée d'une fonction composée

Proposition 6 *Soient* $f : I \to J$ *et* $g : J \to \mathbb{R}$ *et* x_0 *un point de* I.

Si la fonction f *est dérivable en* x_0 *et si* g *est dérivable en* $f(x_0)$ *alors* $g \circ f$ *est dérivable en* x_0 *et on a:*

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times \left[g'(f(x_0))\right].$$

Exemple 1.18

$$[\sin(f(x))]' = f'(x) \times \cos(f(x)).$$

1.5.5 Dérivée d'une fonction réciproque

Proposition 7 *Soient* $f : I \to J$ *une fonction bijective,* x_0 *un élément de* I *et* $y_0 = f(x_0)$ *l'élément de* J*. Pour que* f^{-1} *est dérivable en* y_0 *il faut et il suffit que:*

f *est dérivable en* $x_0, f'(x_0)$ *non nul et* f^{-1} *est continue en* y_0*. Alors:*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(y_0)}.$$

Comme on peut changer les deux positions de y_0 *et* x_0 *entre eux.*

Exemple 1.19 *On note la fonction réciproque de* $\sin x$ *par* $\arcsin x$ *définie sur* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *vers* $[-1, 1]$*, alors la dérivée est:*

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

car $\sin(\arcsin x) = x$ *sur* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Remarque 1.2 *Toujours on donne le résultat en fonction de la première variable de la fonction réciproque donnée.*

1.5.6 Dérivées d'ordre supérieure

On note les dérivées d'ordre supérieure d'une fonction f qui est dérivable dans I un intervalle de $\mathbb{R}$ par: $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ vérifiant:

i) $f^{(0)} = f$.

ii) $f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'$, pour tout $k = 0, 1, ..., n-1$.

Pour calculer les dérivée d'ordre supérieure, on calcul les première dérivée et à partir de ces calculs on s'inspire pour trouver une relation plus générale qu'on peut utiliser le raisonnement par récurrence.pour la démontrer.

Exemple 1.20 *Calculer les dérivée d'ordre* n *des deux fonctions*:

$$(1) f(x) = \cos x.$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x,\ f''(x) = -\cos x,\ f^{(3)}(x) = \sin x \textit{ et } f^{(4)}(x) = \cos x, \\ \Rightarrow\quad f^{(n)}(x) &= \begin{cases} \cos x & si\ n = 4k, k \in \mathbb{N} \\ -\sin x & si\ n = 4k+1, k \in \mathbb{N} \\ -\cos x & si\ n = 4k+2, k \in \mathbb{N} \\ \sin x & si\ n = 4k+3, k \in \mathbb{N} \end{cases} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

car le calcul devient périodique.

$$(2) g(x) = \frac{1}{1-x}.$$

$$g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2},\ g''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, g^{(3)}(x) = \frac{2\times 3}{(1-x)^4},$$

ce qui affirme que la forme générale de la dérivée d'ordre n est:

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

par récurrence, pour $n = 1$ est vraie d'après le premier calcul, on suppose que la relation est vaie pour un n fixé et on démontre qu'elle est vraie pour $n+1$, en effet:

$$f^{(n+1)}(x) = \left[f^{(n)}(x)\right]' = \frac{-(n+1)(-1)(1-x)^n n!}{\left((1-x)^{n+1}\right)^2} = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}},$$

ce qui donne que la relation est vraie pour $(n+1)$. Conclusion:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

1.6 Fonction de classe C^n

Définition 1.11 *Une fonction de classe C^n, est une fonction continue et admet des dérivées continues jusqu'à l'ordre n. Et on dit également que f est n fois continûement dérivable.*

Nous alons envisager ici la méthode pratique pour étudier la classe d'une fonction.

1ère étape: Pour $n = 0$, on s'intéresse à l'étude de la continuité de la fonction. Dans ce cas si la fonction est continue dans I, on écrit pas une fonction de classe C^0 mais on écrit une fonction de classe $C(I)$, c'est les fonctions continues dans un intervalle I.

2ème étape: Pour $n = 1$, une fonction de classe $C^1(I)$ est une fonction continue et la première dérivée de cette fonction **existe** et elle est **continue** en tout point de I**.**

(1) L'existence de la première dérivée:

Pour étudier l'existence de la première dérivée on utilise la définition de la dérivée en tout point x_0 de I ç'est à dire on calcul:

$$\lim_{x \overset{\leq}{\to} x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \overset{\geq}{\to} x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha.$$

Alors on les cas suivants:

i) Si $\alpha = \pm\infty$ ou bien α est égale deux limites ou plus ou bien la limite à gauche est différente à la limite à droite, alors la limite n'existe pas et donc la fonction n'est pas de classe $C^1(I)$, elle est seulement continue.

ii) Si α est égale à une constante unique alors la limite existe et on passe à l'étude de la continuété de la dérivée.

(2) Continuété de la première dérivée:

Pour étudier la continuété de la première dérivée en x_0 on calcul $f'(x)$, ensuite on calcul:,

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = \beta \text{ alors si } \beta \neq \alpha$$

Donc la première dérivée n'est pas continue en x_0, ce qui permet de dire que f n'est pas de classe C^1. Par contre si:

$$\beta = \alpha.$$

Alors la première dérivée est continue en tout point $x_0 \in I$, ce qui permet de dire que f est de classe $C^1(I)$.

3ème étape: Pour $n = 3$, une fonction de classe $C^2(I)$ est une fonction telle que ça dérivée est de classe $C^1(I)$. Donc on fait le même travail que la 2ème étape, mais on utilise f' au lieu de f.

Remarque 1.3 *Si f n'est pas de classe $C^n(I)$, alors elle n'est pas de classe $C^k(I)$, $\forall k \geq n$, mais elle reste de classe $C^{n-1}(I)$.*

Exemple 1.21 *Soit la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0. \end{cases}$$

Etudier la classe de f?

(1) La continuété de f?

La fonction est continue dans $\mathbb{R}^*$.Et en $x = 0$, on a:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} &= 0 \text{ car } \lim_{x\to 0} x^2 = 0 \text{ et } \sin\frac{1}{x} \text{ est bornée.} \\
&= f(0),
\end{aligned}$$

donc f est continue dans $\mathbb{R}$.

(2) f est-elle de classe C^1?

La fonction f est dérivable dans $\mathbb{R}^*$, mais le seul problème est le point 0.

(a) ***Existence de la 1ère dérivée en 0?***

Exemple 8

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0 \\
\text{car } \lim_{x\to 0} x &= 0 \text{ et } \sin\frac{1}{x} \text{ est bornée, d'où l'existence de la 1ère dérivée en 0.}
\end{aligned}$$

Exemple 1.22 *(b)* ***La continuété de la 1ère dérivée en 0?***

$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f'(x)$ *n'existe pas, car* $\cos\infty$ *n'existe pas, donc la 1ère dérivée n'est pas contin*

Conclusion: *f n'est pas de classe C^1, elle est seulement continue.*

1.7 Théoréme de Rolle

Théorème 1.5 *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que: $f(a) = f(b)$. Alors il existe une constante $c \in]a, b[$ telle que:$f'(c) = 0$.*

Exemple 1.23 *Pour montrer que l'équation $\sin x + \cos x = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]0, \pi[$. On utilise la fonction $f(x) = e^x \sin x - 1$ qui est continue dans $[0, \pi]$, dérivable dans $]0, \pi[$ et $f(0) = f(\pi) = -1$. Donc d'après* Rolle, *$\exists c \in]0, \pi[$ telle que: $f'(c) = 0 \Rightarrow e^c \sin c + e^c \cos c = 0 \Rightarrow \sin c + \cos c = 0$, ce qui permet de dire que l'équation $\sin x + \cos x = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]0, \pi[$.*

1.8 Thèorème des accroissements finis

Le théorème des accroissements finis généralise le théorème de ROLLE.

Théorème 1.6 *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe une constante $c \in]a,b[$ tel que:*

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(c).$$

Exemple 1.24 *Montrons que, $\forall x > 0$:*

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}.$$

On applique le théorème des accroissement finis à la fonction $\ln x$, sur l'intervalle $[x, x+1]$, sahant que $\ln x$ est dérivable, alors il existe $c \in]x, x+1[$ tel que:$(x+1) - x = \frac{1}{c}[\ln(x+1) - \ln x]$, mais $\frac{1}{c} \in \left]\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x}\right[$, ce qui affirme que:

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}.$$

1.8.1 Théorème des acroissement finis généralisés

Théorème 1.7 *Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$ avec $g\,'$ne s'annule pas sur $]a,b[$, alors il existe une valeur c de $]a,b[$ telle que:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{f'(c)}.$$

1.9 Théorème de l'Hôpital

Théorème 1.8 *Soient f et g deux fonctions dérivables au voisinage de $x_0 \in]a,b[$. Si: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$ où A, B sont toutes les deux nulles, ou bien les deux infinis, sachant que $g'(x) \neq 0$ pour x voisin de x_0, et si $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe alors:*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exemple 1.25

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2e^{2x}}{1} = 2.$$

1.10 Formules de Taylor.

On peut généraliser le théorème des accroissements finis par une formule dite de TAYLOR, qui est un outil important surtout dans le calcul des limites des fonctions ou on a des formes indéterminées.

1.10.1 Formule de Taylor-Lagrange

Soit f de classe C^n sur $[a, b]$, $(n+1)$ fois dérivable sur $]a, b[$, alors il existe une valeur c de $]a, b[$ telle que:

$$\begin{aligned} f(b) &= \sum_{p=0}^{n} \frac{(b-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c). \\ &= f(a) + (b-a) f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c). \end{aligned}$$

Cette formule est connue par la formule de TAYLOR-LAGRANGE à l'ordre n. De plus le terme $\left[f(a) + (b-a) f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)\right]$ s'appelle la partie régulière de TAYLOR et $\left[\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)\right]$ est appelé le reste de LAGRANGE.

Remarque 1.4 *La formule de* TAYLOR-LAGRANGE *à l'ordre* 0 *est exactement le théorème des accroissements finis.*

1.10.2 Formule de Taylor-Young

Soit f définie sur un intervalle I, admettant en un point $a \in I$ des dérivées jusqu'à l'ordre n. Alors il existe un voisinage V de a et une fonction $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ tels que:

$$\begin{aligned} \forall x &\in V, f(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{(x-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x) \text{ et } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0. \\ &= f(a) + (x-a) f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x) \text{ et } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0. \end{aligned}$$

C'est la formule de TAYLOR avec un reste de YOUNG $((x-a)^n \varepsilon(x))$, comme on peut écrire $((x-a)^n \varepsilon(x))$ par la notation $o((x-x_0)^n)$.

Remarque 1.5 *La formule de* TAYLOR-YOUNG *est la formule* TAYLOR, *on pose $b = x$ et on change la forme du reste qui est une partie négligeable.*

1.10.3 Formule de Maclaurin

C'est la formule de Taylor-Lagrange avec $b = x, a = 0$ et $c = \theta x$ avec $0 < \theta < 1$, c'est à dire:

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!} f^{(p)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \ \text{ avec } 0 < \theta < 1.$$

Remarque 1.6 *C'est trois formule surtout celle de* TAYLOR-YOUNG, *nous permet d'écrire des fonctions quelconques sous forme des polynômes, qui nous simplifies quelques propriétés surtouts le calcul des limites, qu'on va la traitée dans le chapitre du développements limités.*