

Fiche de TD 6 : Les applications linéaires

**Exercice 1 :**

Les applications suivantes de  $E$  dans  $F$  sont elles linéaires? Si oui, déterminer une base du noyau et une base de l'image.

1.  $E = F = \mathbb{R}^2, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = (2x + 3y, x)$ .
2.  $E = F = \mathbb{R}^2, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = (y, x + y + 1)$ .
3.  $E = \mathbb{R}^3, F = \mathbb{R}, \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = x + 2y + z$ .
4.  $E = F = \mathbb{R}^2, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = (x + y, xy)$ .
5.  $E = F = \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = x^2$ .

**Exercice 2 :**

Donner dans chaque cas la dimension du noyau de  $f$ , puis le rang de  $f$ .

L'application  $f$  est-elle injective? surjective? bijective?

1.  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (y, z, x)$ .
2.  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x + y, y + z, x - z)$ .
3.  $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^4, f(x, y, z) = (x + y + z)(1, i, -1, i)$ .
4.  $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^4, f(x, y) = (x - y, x + iy, (2 + i)x + y, 3ix + y)$ .
5.  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (2x + my - z, 2x + 2y, x - 2z)$ , selon la valeur du paramètre réel  $m$ .

**Exercice 3 :**

Soit  $\mathbb{R}_4[X]$  l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 4.

Montrer que l'application  $f$  de  $\mathbb{R}_4[X]$  dans lui même, définie par  $f(P) = P - P'$  est linéaire.

L'application  $f$  est-elle injective? surjective?

**Exercice 4 :**

Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  définie par  $f(x, y, z) = (-x + 2y + z, y + 3z, 2x - 2y + 4z)$ .

a. Donner une base de l'image et une base du noyau de  $f$ . Décrire l'image de  $f$  par un système d'équations linéaires.

b. Soit  $E$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  d'équation  $x = y$ . Quelle est la dimension de  $E$ ? Donner une base de  $f(E)$  et une base de  $f^{-1}(E)$ .

**Exercice 5 :**

Soit  $f : \mathbb{R}_{n+1}[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$  définie par  $f(P) = (n + 1)P - XP'$ .

1. Justifier que  $f$  est bien définie et que c'est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau de  $f$ .
3. Montrer que  $f$  est surjective.

**Exercice 6 :** (SUPP)

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimension finie et  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . Montrer que  $f$  est un isomorphisme si et seulement si l'image par  $f$  de toute base de  $E$  est une base de  $F$ .

**Exercice 7 :** (SUPP)

Soient  $E$  un espace vectoriel réel de dimension 3,  $(e_1, e_2, e_3)$  une base de  $E$  et  $\lambda$  un réel.

Montrer que les relations  $f_\lambda(e_1) = e_1 + e_2, f_\lambda(e_2) = e_1 - e_2$ , et  $f_\lambda(e_3) = e_1 + \lambda e_3$ , définissent une application linéaire  $f_\lambda$  de  $E$  dans  $E$ .

Comment choisir  $\lambda$  pour que  $f_\lambda$  soit injective? surjective?