Fiche de TD 5 : Les espaces vectoriels

Exercice 1 :

1. Soit $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels, muni de l'addition des polynômes et de la multiplication d'un polynôme par un réel.

a. Montrer que $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

b. Que se passe-t-il si on prend $\mathbb{R}[X]_{=n}$?

2. L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est noté $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Nous le munissons d'une :

— **Loi interne $\oplus$** : Soient f et g deux éléments de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. La fonction $f \oplus g$ est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} : (f \oplus g)(x) = f(x) + g(x).$$

(où le signe $\oplus$ désigne la loi interne de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans le membre de gauche et l'addition dans $\mathbb{R}$ dans le membre de droite).

— **Loi externe $\otimes$** : Si α est un nombre réel et f une fonction de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la fonction $(\alpha \otimes f)$ est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} : (\alpha \otimes f)(x) = \alpha \times f(x).$$

(Nous désignons par $\otimes$ la loi externe de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et par $\times$ la multiplication dans $\mathbb{R}$).

Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Exercice 2 :

Parmi les ensembles suivants, reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :

1) $E_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = t \text{ et } y = z\}$	2) $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1\}$
3) $E_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy \geq 0\}$	4) $E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$
5) $E_5 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 1\}$	6) $E_6 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$
7) $E_7 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ est croissante}\}$	8) $E_8 = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ tend vers } 0\}$

Exercice 3 :

1. Les familles suivantes sont-elles libres ?

i. $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (0, 2, 2)$ et $u_3 = (3, 7, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.

ii. $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ et $v_3 = (1, 1, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.

2. On considère dans $\mathbb{R}^n$ une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants (e_1, e_2, e_3, e_4) . Les familles suivantes sont-elles libres ?

a. $(e_1, 2e_2, e_3)$.

b. (e_1, e_3) .

c. $(e_1, 2e_1 + e_4, e_4)$.

d. $(3e_1 + e_3, e_3, e_2 + e_3)$.

e. $(2e_1 + e_2, e_1 - 3e_2, e_4, e_2 - e_1)$.

Exercice 4 :

Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les sous ensembles suivants :

$E_1 = \{(a + b, b - 3a, a) \in \mathbb{R}^3 | a, b \in \mathbb{R}\}$ et $E_2 = \{(c, -2c, c) \in \mathbb{R}^3 | c \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que E_1 et E_2 sont des s.e.v de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base B_1 de E_1 et une base B_2 de E_2 .
3. En déduire $\dim E_1$ et $\dim E_2$.
4. A-t-on $E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^3$?

Exercice 5 : (SUPP)

Soient $P_0 = \frac{1}{2}(X - 1)(X - 2)$, $P_1 = -X(X - 2)$ et $P_2 = \frac{1}{2}X(X - 1)$ trois polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que (P_0, P_1, P_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, exprimer P dans la base (P_0, P_1, P_2) .
3. Soit $Q = \alpha P_0 + \beta P_1 + \gamma P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$, exprimer Q dans la base $(1, X, X^2)$.
4. Pour tout A, B , et C réels montrer qu'il existe un unique polynôme R de $\mathbb{R}_2[X]$, tel que :

$$R(0) = A, R(1) = B \text{ et } R(2) = C.$$

Exercice 6 : (SUPP)

Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] | P(-1) = P(1) = 0\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer une base et la dimension de E .