

1^{ère} année M.I - Semestre 2
Examen de rattrapage : Analyse 2
Durée : 1h30mn

Aucun document n'est autorisé.
L'usage de tout appareil électronique est strictement interdit.

Exercice 1. (7 Pts)

- 1) Calculer l'intégrale indéfinie suivante

$$\int \frac{1+2t}{1+t^2} dt$$

- 2) En déduire la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x) + \sin(2x)}{1 + \cos^2(x)} dx$$

Exercice 2. (6 Pts)

- 1) Donner le développement limité à l'ordre 6 au voisinage de 0 de

$$f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

- 2) En déduire

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\cosh(x)-1}{x^2}}$$

Exercice 3. (7 Pts)

Pour tout $n \geq 0$, on pose

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-3x} dx.$$

- 1) En utilisant une intégration par partie, montrer que

$$I_n + \frac{e^{-3}}{3} = \frac{n}{3} I_{n-1}$$

- 2) Calculer I_0, I_1 et I_2 .
3) En déduire le réel

$$\int_0^1 (3x^2 - 5x + 7)e^{-3x} dx$$

1^{ère} année M.I - Semestre 2
Corrigé de l'examen de rattrapage : Analyse 2
Durée : 1h30mn

Exercice 1. (7 Pts).

1) Nous remarquons que

$$\begin{aligned} \int \frac{1+2t}{1+t^2} dt &= \int \frac{dt}{1+t^2} + \int \frac{2tdt}{1+t^2} \\ &= \arctan(t) + \ln(1+t^2) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (2\text{Pts}) \end{aligned}$$

2) En utilisant le changement de variable $t = \cos(x)$, (1 Pt) on a $dt = -\sin(x)dx$. (0.5 Pt)

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x) + 2\sin(x)\cos(x)}{1+\cos^2(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)(1+2\cos(x))}{1+\cos^2(x)} dx \quad (1\text{Pt}) \\ &= - \int_1^0 \frac{1+2t}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{1+2t}{1+t^2} dt \quad (1.5\text{Pts}) \\ &= [\arctan(t) + \ln(1+t^2)]_0^1 = (\arctan(1) + \ln(2)) - (\arctan(0) + \ln(1)) \\ &= \frac{\pi}{4} + \ln(2). \quad (1\text{Pt}) \end{aligned}$$

Exercice 2. (6 Pts).

1) La fonction $f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ est de classe C^n sur un intervalle contenant 0. Donc, d'après la formule de Taylor-Young, le DL à l'ordre 6 au voisinage de 0 est donné par

$$f(x) = f(0) + \frac{xf'(0)}{1!} + \frac{x^2 f''(0)}{2!} + \dots + \frac{x^6 f^{(6)}(0)}{6!} + o(x^6). \quad (0.5\text{Pt})$$

Alors, on a $f(0) = 1$ (0.5 Pt)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow f'(0) = 0 \\ f''(x) &= \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow f''(0) = 1 \\ f^{(3)}(x) &= \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow f^{(3)}(0) = 0 \\ f^{(4)}(x) &= \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow f^{(4)}(0) = 1 \\ f^{(5)}(x) &= \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow f^{(5)}(0) = 0 \\ f^{(6)}(x) &= \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow f^{(6)}(0) = 1. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} + o(x^6). \quad (2.5\text{Pts})$$

2) En remplaçant le DL, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} + o(x^6) - 1}{x^2}} = \sqrt{e} \quad (2.5 \text{ Pts})$$

Exercice 3. (7 Pts).

1) Par une intégration par parties et en posant

$$\left. \begin{array}{l} u = x^n \Rightarrow u' = nx^{n-1} \\ v' = e^{-3x} \Rightarrow v = -\frac{1}{3}e^{-3x}, \end{array} \right\} \quad (1 \text{ pt})$$

On a

$$\begin{aligned} I_n &= \left[-\frac{x^n e^{-3x}}{3} \right]_0^1 + \frac{n}{3} \int_0^1 x^{n-1} e^{-3x} dx \\ &= -\frac{e^{-3}}{3} + \frac{n}{3} I_{n-1}. \quad (1 \text{ Pt}) \end{aligned}$$

2) On a

$$I_0 = \int_0^1 e^{-3x} dx = \left[\frac{e^{-3x}}{-3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{e^{-3}}{3} \quad (1 \text{ Pt})$$

De plus, remarquons que

$$\begin{aligned} I_1 + \frac{e^{-3}}{3} &= \frac{I_0}{3} \\ \Rightarrow I_1 &= \frac{I_0}{3} - \frac{e^{-3}}{3} = \frac{1 - e^{-3}}{9} - \frac{e^{-3}}{3} \quad (1 \text{ Pt}) \end{aligned}$$

Pour I_2 , on a

$$I_2 + \frac{e^{-3}}{3} = \frac{2I_1}{3} \Rightarrow I_2 = \frac{2}{3} \left(\frac{1 - e^{-3}}{9} - \frac{e^{-3}}{3} \right) - \frac{e^{-3}}{3} \quad (1 \text{ Pt})$$

3) Remarquons que

$$\begin{aligned} \int_0^1 (3x^2 - 5x + 7)e^{-3x} dx &= 3 \int_0^1 x^2 e^{-3x} dx - 5 \int_0^1 x e^{-3x} dx + 7 \int_0^1 e^{-3x} dx \\ &= 3I_2 - 5I_1 + 7I_0 = 2 - 2e^{-3} \quad (2 \text{ Pts}) \end{aligned}$$