Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen **Année Universitaire 2019-2020**
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques **Date : 10/11/2020**

1ère Année LMD MI Durée : 01H30.

Corrigé de l'examen de Rattrapage : Algèbre 2

Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits

Exercice 1 : (05 points)

Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$u = (1, t, t^2), v = (t^2, 1, 1), w = (1, t, 1).$$

1. A quelle condition sur $t \in \mathbb{R}$, les vecteurs u, v et w forment une famille libre dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 2 : (07 points)

Soit f une application définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto f(x, y, z) = (2y - 2z, x + y - 2z). \end{aligned}$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer $Kerf$ le noyau de f, puis donner une base de $Kerf$ et en déduire $dim(Kerf)$.
3. f est- elle injective ?
4. Donner $dim(Imf)$.
5. f est-elle surjective ?

Exercice 3 : (08 points)

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on considère l'ensemble des fonctions paires

$$\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(-x) = f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}\},$$

et l'ensemble des fonctions impaires

$$\mathcal{I} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(-x) = -f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P} \bigoplus \mathcal{I}$.

Solution Exercice 1 :

Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$u = (1, t, t^2), v = (t^2, 1, 1), w = (1, t, 1).$$

1. Trouvons la valeur de t pour laquelle u, v et w sont linéairement indépendants.

u, v et w sont linéairement indépendants si pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$:

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0. \boxed{\text{01pt}}$$

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha(1, t, t^2) + \beta(t^2, 1, 1) + \gamma(1, t, 1) = (0, 0, 0). \boxed{\text{0.5pt}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta t^2 + \gamma = 0 \\ \alpha t + \beta + \gamma t = 0 \\ \alpha t^2 + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \boxed{\text{0.5pt}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma = -\alpha - \beta t^2. \\ \beta(1 - t^3) = 0 \\ \alpha(1 - t^2) + \beta(1 - t^2) = 0 \end{cases} \boxed{\text{0.5pt}}$$

Pour avoir une famille libre il faut que $(1 - t^3) \neq 0$ $\boxed{\text{0.5pt}}$, ceci implique que $\beta = 0$, ce qui entraine que $\alpha(1 - t^2) = 0$ $\boxed{\text{0.5pt}}$, donc $1 - t^2 \neq 0$, $\boxed{\text{0.5pt}}$ implique que $\alpha = 0$. Donc il faut que $t \neq 1$ et $t \neq -1$. $\boxed{\text{1pt}}$

Solution Exercice 2 :

Soit

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2y-2z, x+y-2z) \end{array}$$

1. f est une application linéaire si est seulement si :

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : f\left(\lambda u + \mu v\right) = \lambda f(u) + \mu f(v). \boxed{\text{1pt}}$$

   En effet pour $u = (x,y,z), v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} f\left(\lambda u + \mu v\right) & = & f\left(\lambda\left(x,y,z\right) + \mu\left(x',y',z'\right)\right) \\ & = & f\left(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z'\right) \\ & = & \left(2(\lambda y + \mu y') - 2(\lambda z + \mu z'), \lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y' - 2(\lambda y + \mu y')\right) \\ & = & \lambda\left(2y-2z, x+y-2z\right) + \mu\left(2y'-2z', x'+y'-2z'\right) \\ & = & \lambda f\left(x,y,z\right) + \mu f\left(x',y',z'\right) \\ & = & \lambda f\left(u\right) + \mu f\left(v\right). \boxed{\text{1pt}} \end{array}$$

2. • $Ker(f) = \left\{u \in \mathbb{R}^3;\ f(u) = 0_{\mathbb{R}^2}\right\}. \boxed{\text{0.5pt}}$

$$f(u) = 0_{\mathbb{R}^2} \Longrightarrow (2y-2z, x+y-2z) = (0,0) \Longrightarrow \{y = z \text{ et } x = z\}, \boxed{\text{0.5pt}}$$

   et par suite :

$$Ker(f) = \left\{u \in \mathbb{R}^3; u = (x,x,x) = x(1,1,1),\ \text{où } x \in \mathbb{R}\right\} \boxed{\text{0.5pt}}$$

   • Base de $Ker(f)$ est $B = \{(1,1,1)\}\boxed{\text{0.5pt}}$.
   • $dim(Ker(f)) = 1.\boxed{\text{0.5pt}}$

3. Injectivité : on sait que

$$f \text{ est injective} \Longleftrightarrow ker f = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \boxed{\text{0.5pt}}$$

   Puisque $ker f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, alors f n'est pas injective. $\boxed{\text{0.5pt}}$

4. • $dim(Im(f))$, on a

$$dim(\mathbb{R}^3) = 3 = dim(Ker(f)) + dim(Im(f)). \boxed{\text{0.5pt}}$$

   Et par suite : $dim(Im(f)) = dim(\mathbb{R}^3) - dim(Ker(f)) = 3 - 1 = 2.\boxed{\text{0.5pt}}$

5. Surjectivité : puisque $dim(Im(f)) = dim(\mathbb{R}^2) = 2$ alors f est surjective. $\boxed{\text{0.5pt}}$

Solution Exercice 3 :

1. Montrons que $\mathcal{P}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

a. La fonction identiquement nulle appartient à $\mathcal{P}$. $\boxed{\text{0.5pt}}$

b. Soient $f, g \in \mathcal{P}$, montrons que $\alpha f + \beta g \in \mathcal{P}$.

$$(\alpha f + \beta g)(-x) = (\alpha f)(-x) + (\beta g)(-x) = \alpha f(-x) + \beta g(-x)$$

$$= \alpha f(x) + \beta g(x) = (\alpha f + \beta g)(x).$$

Ce qui implique que $\alpha f + \beta g \in \mathcal{P}$. $\boxed{\text{0.5pt}}$ De même on montre que $\mathcal{I}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. $\boxed{\text{1pt}}$

2. Montrons que $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathcal{P} \bigoplus \mathcal{I}$.

a. Montrons $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\}$:

Soit $f \in \mathcal{P} \cap \mathcal{I}$, c'est-à-dire que f est à la fois une fonction paire et impaire. Il s'agit de montrer que f est la fonction identiquement nulle. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $f(-x) = f(x)$ (car f est paire) et $f(-x) = -f(x)$ (car f est impaire), alors $f(x) = -f(x)$, ce qui implique $f(x) = 0$. Ceci est vrai quel que soit $x \in \mathbb{R}$, donc f est la fonction nulle. Ainsi $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\}$. $\boxed{\text{2pt}}$

b. Montrons $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathcal{P} + \mathcal{I}$.

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Il s'agit de montrer que f peut s'écrire comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Si $f = g + h$, avec $g \in \mathcal{P}, h \in \mathcal{I}$, alors pour tout x, d'une part $f(x) = g(x) + h(x)$, et d'autre part, $f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$. Par somme et différence , on obtient

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \boxed{\text{1pt}}$$

et

$$h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \boxed{\text{1pt}}$$

On peut vérifier que $g(-x) = g(x)$ et $h(-x) = h(x)$.

Conclusion :

$$\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathcal{P} \bigoplus \mathcal{I}. \boxed{\text{2pt}}$$