Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2019/2020

جامعة أبو بكر بلقايد
UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

1ère année M.I - Semestre 2

Examen final : Analyse 2

Durée : 1h30mn

Aucun document n'est autorisé.
L'usage de tout appareil électronique est strictement interdit.

Exercice 1. (7 Pts)

1) Donner le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de $f(x) = e^x \ln(1+x)$.
2) En déduire la valeur de $f''(0)$ et celle de $f^{(4)}(0)$.
3) Donner l'équation de la tangente en $x = 0$ tout en précisant sa position par rapport à la courbe au point 0.
4) Utiliser la première question pour calculer la limite suivante

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x \ln(1+x) - x}{x^2}$$

Exercice 2. (7 Pts)

1) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante sous la forme

$$f(x) = \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2},$$

où a, b et c sont des constantes à déterminer.

2) Calculer sur $]0, +\infty[$, l'intégrale indéfinie

$$I = \int \frac{dx}{x(1+x^2)}$$

3) En déduire la valeur de l'intégrale

$$I_0 = \int_{1/2}^{1} \frac{\arctan(x)dx}{x^2}$$

Exercice 3. (6 Pts)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$K_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

1) Calculer K_1.
2) Montrer, en effectuant une intégration par partie, que

$$K_1 = \frac{1}{2} + 2(K_1 - K_2).$$

3) En déduire la valeur de K_2.

Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2019/2020

1ère année M.I - Semestre 2

Corrigé de l'examen final : Analyse 2

Durée : 1h30mn

Exercice 1. (7 Pts).

1. Le DL à l'ordre 4 au voisinage de 0 de $f(x) = e^x \ln(1+x)$:
On a

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \qquad (\mathbf{1\,pt})$$

et

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \qquad (\mathbf{1\,pt}).$$

Ainsi

$$\left.\begin{array}{rl} f(x) & = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) \\ & = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{3!} + o(x^4) \\ & = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^4). \end{array}\right\} \qquad (\mathbf{1.5\,pt}).$$

2. Il s'agit d'identifier le DL de f avec la formule de Taylor-Young de f :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + o(x^4)$$

Par unicité des DL en identifiant les coefficients devant x^2 et x^4 dans les deux développements respectivement, on obtient

$$f''(0) = 1, \text{ et } f^{(4)}(0) = 0 \qquad (\mathbf{0.5\,pt}) + (\mathbf{0.5\,pt}).$$

3. La droite d'équation $y = x$ est la tangente de la courbe de f en $x = 0$. De plus,

$$f(x) - x = \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Ainsi $f(x) - y \geq 0$ au voisinage de 0 et par suite la courbe de f est au-dessus de la tangente au vois. de 0. $(\mathbf{1\,pt})$

4. En remplaçant $f(x)$ par son DL on obtient

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \ln(1+x) - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x}{x^2} = \frac{1}{2}. \qquad (\mathbf{1.5\,pt})$$

Exercice 2. (7 Pts)

1. On a

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2} = \frac{(a+b)x^2 + cx + a}{x(1+x^2)}.$$

Par identification, on trouve

$$a = 1,\ b = -1, \text{ et } c = 0. \qquad (\mathbf{1.5\,pt})$$

Donc

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}.$$

2.

$$I=\int \frac{dx}{x(1+x^2)}=\int \frac{dx}{x}-\int \frac{x}{1+x^2}dx=\ln(x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c,\ c\in\mathbb{R}. \qquad (\mathbf{2.5\,pt})$$

3. Calcul de I_0, on a $I_0=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\arctan(x)}{x^2}dx$, par une intégration par parties et en posant

$$\left.\begin{array}{l} u=\arctan(x)\Rightarrow u'=\frac{1}{1+x^2} \\ v'=\frac{1}{x^2}\Rightarrow v=-\frac{1}{x} \end{array}\right\} \qquad (\mathbf{1\,pt})$$

On a

$$\begin{aligned}
I_0 &= \left[-\frac{\arctan(x)}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{x(1+x^2)} \qquad (\mathbf{1\,pt})\\
&= -\arctan(1)+2\arctan\left(\frac{1}{2}\right)+\left[\ln(x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_{\frac{1}{2}}^{1}\\
&= -\arctan(1)+2\arctan\left(\frac{1}{2}\right)+\left[\ln(1)-\frac{1}{2}\ln(2)-\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{4}\right)\right]\\
&= -\frac{\pi}{4}+2\arctan\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\ln(2)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{4}\right) \qquad (\mathbf{1\,pt})
\end{aligned}$$

Exercice 3. (6 Pts)

On a

$$K_n=\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

1.

$$K_1=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=[\arctan(x)]_0^1=\arctan(1)-\arctan(0)=\frac{\pi}{4}. \qquad (\mathbf{1\,pt})$$

2. On pose

$$\left.\begin{array}{l} u=\frac{1}{1+x^2}\Rightarrow u'=-\frac{2x}{(1+x)^2} \\ v'=1\Rightarrow v=x \end{array}\right\} \qquad (\mathbf{2\,pt})$$

On a

$$\begin{aligned}
K_1 &= \left[\frac{x}{1+x^2}\right]_0^1+2\int_0^1\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx \qquad (\mathbf{1\,pt})\\
&= \frac{1}{2}+2\int_0^1\frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^2}dx\\
&= \frac{1}{2}+2\left[\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx-\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)^2}dx\right].
\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$K_1=\frac{1}{2}+2(K_1-K_2). \qquad (\mathbf{1\,pt})$$

3. Finalement,

$$K_1-2K_1=\frac{1}{2}-2K_2\Rightarrow K_2=\frac{K_1+\frac{1}{2}}{2}.$$

Ainsi

$$K_2=\frac{\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}}{2}=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}. \qquad (\mathbf{1\,pt})$$