Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen **Année Universitaire 2019-2020**
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques **Date : 29/09/2020**

1ère Année LMD MI Durée : 01H30.

Epreuve finale : Algèbre 2

Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits

Exercice 1 : (05 points)

Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$u = (1, 0, 0), v = (1, x, 1), w = (0, 0, 1).$$

1. A quelle condition sur $x \in \mathbb{R}$, les vecteurs u, v et w forment une famille libre dans $\mathbb{R}^3$?
2. Parmi les familles ci-dessous, laquelle est une base de $\mathbb{R}^3$?

i) $A = \{(1, 1, 2), (0, -1, 1)\}$.
ii) $B = \{(1, 1, 2), (0, -1, 1), (1, 0, 1)\}$.
iii) $C = \{(1, 1, 2), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$.
iv) $D = \{(1, 1, 2), (0, -1, 1), (1, 0, 1), (2, 1, 3)\}$.

Exercice 2 : (08 points)

Soit f une application définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto f(x, y, z) = (2y - 2z, x + y - 2z, x - y). \end{aligned}$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer $Kerf$ le noyau de f, puis donner une base de $Kerf$ et en déduire $dim(Kerf)$.
3. f est- elle injective ?
4. Déterminer Imf, puis donner une base de Imf et en déduire $dim(Imf)$.
5. f est-elle surjective ?

Exercice 3 : (07 points)

Soient les ensembles suivants

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$$

et

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = x + z = 0\}.$$

1. Montrer que E et F sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner $dimE$ et $dimF$.
3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = E \bigoplus F$.

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen A.U 2019/2020

Faculté des sciences

Département de Mathématiques 1ère année LMD MI

Corrigé E.F : Algèbre 2

Exercice 1 : (05 pts)

1/ dans $\mathbb{R}^3$:

$u=(1,0,0)$, $v=(1,x,1)$, $w=(0,0,1)$

$\{u,v,w\}$ famille libre ds $\mathbb{R}^3 \iff \alpha u+\beta v+\gamma w=(0,0,0)$ 0,5

$\Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$

$\alpha u+\beta v+\gamma w=(0,0,0) \Rightarrow (\alpha,0,0)+(\beta,\beta x,\beta)+(0,0,\gamma)=(0,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ \beta.x=0 \Rightarrow \beta=0 \vee x=0 \\ \beta+\gamma=0 \end{cases}$$ 0,5

Si $x=0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha=-\beta \\ \beta=-\gamma \end{cases} \Rightarrow \{u,v,w\}$ est liée

donc pour $x\neq 0$ 0,5, la famille $\{u,v,w\}$ est libre ds $\mathbb{R}^3$.

2/ A et D sont pas des bases de $\mathbb{R}^3$ car elles contiennent chacunes deux vecteurs et 4 vecteurs et $\dim \mathbb{R}^3=3$. (0,5 + 0,5) pts

C n'est pas une base car $\exists\, \alpha=1, \beta=-1, \gamma=-1$ tels que

$(1,1,2)-(0,1,1)-(1,0,1)=(0,0,0)$. 01pts

Pour B, montrons qu'elle est libre.

$$\alpha(1,1,2)+\beta(0,-1,1)+\gamma(1,0,1)=(0,0,0) \Rightarrow \begin{cases}\alpha+\gamma=0\\ \alpha-\beta=0\\ 2\alpha+\beta+\gamma=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha+\gamma=0\\ \alpha=\beta\\ 2\alpha+\alpha+\gamma=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=-\gamma\\ \alpha=\beta\\ 2\alpha=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\end{cases}$$

0,5 0,5

$\Rightarrow$ B est libre, donc une base de $\mathbb{R}^3$ car

le nombre des vecteurs $=\dim \mathbb{R}^3=3$ (libre = génératrice)

0,5

Exercice 2 : (08 pts)

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z)=(2y-2z,\ x+y-2z,\ x-y)$$

0,5

1/ f linéaire $\Leftrightarrow \forall u,v\in\mathbb{R}^3,\ \forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}: f(\alpha u+\beta v)=\alpha.f(u)+\beta f(v)$

$u=(u_1,u_2,u_3)$, $v=(v_1,v_2,v_3)$ $\quad \alpha u+\beta v=(\alpha u_1+\beta v_1,\ \alpha u_2+\beta v_2,\ \alpha u_3+\beta v_3)$

$$f(\alpha u+\beta v)=f(\underbrace{\alpha u_1+\beta v_1}_{x},\ \underbrace{\alpha u_2+\beta v_2}_{y},\ \underbrace{\alpha u_3+\beta v_3}_{z})$$

$$=(2y-2z,\ x+y-2z,\ x-y)$$

0,5

$$=(2(\alpha u_2+\beta v_2-\alpha u_3-\beta v_3),\ \alpha u_1+\beta v_1+\alpha u_2+\beta v_2-2\alpha u_3-2\beta v_3,\ \alpha u_1+\beta v_1-\alpha u_2-\beta v_2)$$

$$= (2\alpha u_2 - 2\alpha u_3,\ \alpha u_1 + \alpha u_2 - 2\alpha u_3,\ \alpha u_1 - \alpha u_2) +$$
$$(2\beta v_2 - 2\beta v_3,\ \beta v_1 + \beta v_2 - 2\beta v_3,\ \beta v_1 - \beta v_2)$$

$$= \alpha \underbrace{(2u_2 - 2u_3,\ u_1 + u_2 - 2u_3,\ u_1 - u_2)}_{f(u_1,u_2,u_3)}$$
$$+ \beta \underbrace{(2v_2 - 2v_3,\ v_1 + v_2 - 2v_3,\ v_1 - v_2)}_{f(v_1,v_2,v_3)}$$

$$= \alpha . f(u) + \beta . f(v) .$$

2/ $\operatorname{Ker} f = \{ u \in \mathbb{R}^3 / f(u) = (0,0,0) \}$ 0,5

$u = (u_1, u_2, u_3)$

$$f(u) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} 2u_2 - 2u_3 = 0 \\ u_1 + u_2 - 2u_3 = 0 \\ u_1 - u_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_2 = u_3 \\ u_1 = u_2 \end{cases}$$ 0,5

$$\Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{ u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 / u_1 = u_2 = u_3 \}$$
$$= \{ (u_1, u_1, u_1) / u_1 \in \mathbb{R} \} = \{ u_1 (1,1,1) / u_1 \in \mathbb{R} \}$$ 0,5

0,5

$B = \{ (1,1,1) \}$ une base de $\operatorname{Ker} f \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f = 1$ 0,5

3/ f n'est pas injective car $\operatorname{Ker} f \neq \{(0,0,0)\}$. 0,5

4/ $\operatorname{Im} f = \{ f(u_1, u_2, u_3) / (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \}$ 0,5

$$v = f(u) \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 2u_2 - 2u_3 \\ v_2 = u_1 + u_2 - 2u_3 \\ v_3 = u_1 - u_2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{v_2 - v_1 = v_3}$$

0,5

donc $\operatorname{Im} f = \{(v_1, v_2, v_3) \,/\, v_2 - v_1 = v_3\}$

$= \{(v_1, v_2, v_2 - v_1) \,/\, (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2\}$

$= \{(v_1, 0, -v_1) + (0, v_2, v_2) \,/\, v_1, v_2 \in \mathbb{R}\}$

$= \{v_1(1, 0, -1) + v_2(0, 1, 1) \,/\, v_1, v_2 \in \mathbb{R}\}$ 0,5

Ce qui implique que $\{(1,0,-1), (0,1,1)\}$ est génératrice ds $\operatorname{Im} f$

Montrons qu'elle est libre : en effet :

$\alpha(1,0,-1) + \beta(0,1,1) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \beta - \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$ 0,5

0,5

donc $\mathcal{B}' = \{(1,0,-1), (0,1,1)\}$ une base de $\operatorname{Im} f$.

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 2$ 0,5

5/ f n'est pas surjective car elle n'est pas injective

(dimension de $E = F = \mathbb{R}^3$ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linéaire donc injective $\Leftrightarrow$ surjective)

ou bien : $\dim \operatorname{Im} f = 2 \neq \dim \mathbb{R}^3$ 0,5

donc $\operatorname{Im} f \neq \mathbb{R}^3$

Exercice 3 :

Soient les ensembles suivants :

$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y = x + z = 0\}$

1. • Commençons par E.

0,5 $E \neq \emptyset$, il contient au moins 0, car soit $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ et $0+0+0 = 0$ alors $E \neq \emptyset$.

Soit $X = (x, y, z), X' = (x', y', z') \in E$, et soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, il est clair que $\lambda X + \mu X' \in E$ alors $\lambda(x + y + z) + \mu(x' + y' + z') = 0$ car $X, X' \in E$.

0,5

• $F \neq \emptyset$, car il contient au moins 0, soit $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ et $0 - 0 = 0 + 0 = 0$ alors $F \neq \emptyset$.

0,5 Soit $X = (x, y, z), X' = (x', y', z') \in F$, et soit λ, μ deux réels quelconques.

0,5 Par hypothèse on a d'une part $x - y = x + z$, alors

$$\lambda(x - y) = \lambda(x + z) = 0. \tag{1}$$

Et d'autre part $x' - y' = x' + z'$, d'où

$$\mu(x' - y') = \mu(x' + z') = 0 \tag{2}$$

(1)+(2) donne:

$$\lambda x + \mu x' - (\lambda y + \mu y') = \lambda x + \mu x' + \lambda z + \mu z' = 0.$$

Ainsi

$$\lambda X + \mu X' = \begin{pmatrix} \lambda x + \mu x' \\ \lambda y + \mu y' \\ \lambda z + \mu z' \end{pmatrix} \in F.$$

2. • La base de E, on a $X \in E$ alors $x + y + z = 0 \Rightarrow x = -y - z$ alors $(x, y, z) = (-y - z, y, z) = (-y, y, 0) + (-z, 0, z) = y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$, et par suite la base de E est

0,5

$$\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$$

alors la $dim(E) = 2$.

• La base de F, soit $X \in F$ alors $x - y = x + z = 0 \Rightarrow z = -y$ et $y = x$ alors $(x, y, z) = (y, y, -y) = y(1, 1, -1) = y(1, 1, -1)$, et par suite la base de F est

$$\{(1, 1, -1)\}$$

alors la $dim(F) = 1$.

0,5

- 1 eme méthode: on vérifie les propriètés de la somme directe, il faut vérifie que $\mathbb{R}^3 = E + F$ et $E \cap F = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, on définit

$$E + F = \{X \in \mathbb{R}^3; X = x_1 + x_2 \text{ où } x_1 \in E \text{ et } x_2 \in F\}$$

$E + F \subset \mathbb{R}^3$ clair par définition.
$\mathbb{R}^3 \subset E + F$, soit $X \in \mathbb{R}^3$ tel que $X = (x, y, z)$ l'objectif est d'écrire $X = X_1 + X_2$ avec $X_1 \in E$ et $X_2 \in F$.
Soit $X_1 = (x', y', z') \in E$ alors $x' + y' + z' = 0$, soit encore que $z' = -x' - y'$ donc $X_1 = (x', y', -x' - y')$.
Soit $X_2 = (x'', y'', z'') \in F$ alors $x'' - y'' = x'' + z''$ soit encore que $y'' = x''$ et $z'' = -x''$ donc $X_2 = (x'', x'', -x'')$, et par suite

$$X = X_1 + X_2 \Leftrightarrow (x, y, z) = (x', y', -x' - y') + (x'', x'', -x'')$$

en identifiant composante par composante, on obtient le système

$$\begin{cases} x = x' + x'' \\ y = y' + x'' \\ z = -x' - y' - x'' \end{cases}$$

après substitution, et par un calcul direct on obtient

$$\begin{cases} x'' = x + y + z \\ x' = -y - z \\ y' = -x - z \end{cases}$$

il est alors facile de vérifier que $X = X_1 + X_2$, avec $X = (x, y, z)$ et $X_1 = (-y - z, -x - z, x + y + 2z) \in E$ et $X_2 = (x + y + z, x + y + z, -x - y - z) \in F$.

02

- Pour l'intersection entre E et F, il est clair que E, F sont deux sous espaces vectoriels, ils contient au moins le $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ alors l'intersection n'est pas vide, soit $X \in E \cap F$ donc $X \in E$ et $X \in E$, ce qui donne $x + y + z = 0$ et $x - y = x + z = 0 \Rightarrow x = y = -z = 0$ et $x + y + z = 0$ alors

$$E \cap F = \{(0, 0, 0)\}.$$

Donc

$$\mathbb{R}^3 = E \oplus F.$$

01

- 2ème méthode: on utilise la dimension, puisque $dim(E + F) = dim(E) + dim(F) - dim(E \cap F)$ et d'autre part $dim(E \cap F) = 0$, (déjà démontré précédement) donc $dim(E + F) = dim(E) + dim(F) = 2 + 1 = dim(\mathbb{R}^3)$, et $E + F \subset \mathbb{R}^3$, on déduit que

$$\mathbb{R}^3 = E \oplus F.$$