

TD n° 1 de Mécanique

Analyse dimensionnelles et calcul d'incertitudes

A. Rappel mathématique :

I. Les dérivées des fonctions usuelles

Domaine de définition Df	Fonction f(x)	Domaine de dérivabilité Df'	Fonction dérivée f'(x)
$\mathbb{R}$	$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$\mathbb{R}$	$f(x) = ax$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$\mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$	$f(x) = x^n$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$\mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}$	$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$\mathbb{R}^*, n \in \mathbb{N}$	$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$\mathbb{R}$	$f(x) = a^x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a^x \ln a$
$\mathbb{R}^*$	$f(x) = \log_a x $	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
$\mathbb{R}$	$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$
$\mathbb{R}$	$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$
$\mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$	$f(x) = \tan x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$[-1; 1]$	$f(x) = \arcsin x$	$] -1; 1[$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Opération	Dérivée
$f + g$	$f' + g'$
$f \cdot g$	$f' \cdot g + f \cdot g'$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
$g \circ f$	$f' \times g' \circ f$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
u^n	$nu' u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
e^u	$u' e^u$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
$\sin(u)$	$u' \cos(u)$
$\cos(u)$	$-u' \sin(u)$

II. Les primitives des fonctions usuelles

Fonction $f(x)$	Primitive $F(x)$	Domaine de validité
a (réel donné)	ax	$\mathbb{R}$
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{-1\}$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$\mathbb{R}^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\tan(x)$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$] -1, 1[$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$] -1, 1[$
$a^x, a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$	$\frac{a^x}{\ln(a)}$	$\mathbb{R}$

Soit $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable.

Fonction	Primitive
$u' u^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)$
$u' e^u$	e^u
$u' \cos(u)$	$\sin(u)$
$u' \sin(u)$	$-\cos(u)$
$\frac{u'}{\cos^2(u)} = u'(1 + \tan^2(u))$	$\tan(u)$
$\frac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u)$
$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arcsin(u)$

B. Exercices :

Exercice 1

Complétez le tableau suivant :

Grandeur physique	Symbole de la grandeur	Formule utilisée	Dimension	Unité (SI)
Surface				
Volume				
Masse volumique				
Fréquence				
Vitesse linéaire				
Vitesse angulaire				
Accélération linéaire				
Accélération angulaire				
Force				
Travail				
Energie				
Puissance				
Pression				

Exercice 2

a- L'équation caractéristique d'un fluide à température constante est de la forme suivante

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(V - b) = c$$

Où p est la pression et V est le volume.

Déterminer les dimensions des grandeurs a , b et c .

b- Lorsque la bille est lâchée sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$, sa vitesse s'écrit pour $t > 0$ par:

$$v = a \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{b}\right)\right)$$

Où a et b sont deux grandeurs qui dépendent des caractéristiques du fluide.

Quelles sont les dimensions de a et b ?

Exercice 3

Les formules suivantes sont-elles valides dimensionnellement ? Faites une analyse dimensionnelle pour confirmer ou rectifier.

- 1- $F = \frac{Gm}{r}$, tels que : F est une force, G une constante exprimé en $\frac{m^3}{kg s^2}$, m une masse et r une longueur.
- 2- $p = \rho g h_1 + h_2 F$ tels que : P : une pression, g : l'accélération de la pesanteur, h_1 et h_2 : hauteurs et F : une force
- 3- $\theta = \frac{b \sin(a)}{t \cos(c)}$, tels que : b et t ont une dimension d'une longueur.

Exercice 4

Des expériences ont montré que la vitesse v du son dans un gaz n'est fonction que de la masse volumique ρ et du coefficient de compressibilité χ .

Quelle est la loi qui donne la vitesse v en fonction des caractéristiques du gaz, on rappelle que χ est homogène à l'inverse d'une pression.

Exercice 5

Un pendule formé d'une boule (sphère) de rayon R et de masse m . L'étude de l'effet de l'air sur ce pendule montre que sa période dépend d'une constante k , du coefficient de viscosité de l'air η , du rayon de la boule R et de sa masse volumique ρ .

1- Trouvez l'expression de la période en la supposant de la forme :

$$T = K \eta^x R^y \rho^z \text{ avec } [\eta] = ML^{-1}T^{-1}$$

2- Déterminez l'incertitude relative sur T en fonction de $\Delta\eta$, ΔR , Δm .

Exercice 6

L'expression d'une grandeur physique G est :

$$G = \frac{T^2 g a}{4\pi^2} - a^2$$

T représente le temps, a est une longueur et g est l'accélération de la pesanteur.

- 1- Déterminer la dimension de G et déduire son unité.
- 2- Calculer l'incertitude absolue ΔG en fonction de ΔT et Δa .

Exercice 7

La résistivité électrique d'un fil électrique en cuivre, de diamètre D , de longueur L et de résistivité R est donnée par la formule suivante :

$$\rho = \frac{\pi R D^2}{4L}$$

Donnez l'incertitude sur la résistivité électrique ρ en utilisant la méthode de la différentielle totale et la méthode logarithmique.

On donne pour application numérique :

$R=0.4562\pm0.0002 \Omega$ $L=2.000\pm0.0001 \text{ m}$ et $D=0.30\pm0.01\text{m}$.

Calculer l'incertitude absolue $\Delta\rho$ et donnez la précision $\Delta\rho/\rho$.

Exercice supplémentaire :

La hauteur H d'un liquide de masse M contenu dans un cylindre de rayon R est donnée par la relation :

$$H = \frac{(2 \cdot \sigma \cdot \cos\alpha)}{(R \cdot g \cdot \rho)}$$

Ou α est l'angle de contact liquide-cylindre, ρ la masse volumique du liquide et g l'accélération de pesanteur.

- 1- En utilisant les équations aux dimensions, trouver la dimension de σ .
- 2- Déterminer l'incertitude relative sur σ en fonction des incertitudes absolues ΔR , Δg , ΔM et $\Delta \alpha$.