Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Licence 1ère année MI, 2019–2020

ANALYSE1

Fiche de TD 5 : Fonctions dérivables, fonctions élémentaires.

I) Fonctions dérivables

Exercice 1. Calculer les dérivées des fonctions suivantes en précisant leurs domaines de définition.

$$1) f(x) = e^{3x}+e^{1/x}, \quad 2) f(x) = \sqrt{1+(x\cos(x))^2}, \quad 3) f(x) = \sin(\cos(3x)), \quad 4) f(x) = 2^{\ln(x)}+3^x$$

Exercice 2. Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes

$$1) f(x) = x|x|, \qquad 2) f(x) = \frac{1}{1+|x|}, \qquad 3) f(x) = \begin{cases} x^2\cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Exercice 3. Calculer la dérivée nième des fonctions suivantes

$$1) f(x) = e^{ax}, \qquad 2) f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Exercice 4. Soient a et b deux réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ ax^2+bx+1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Déterminer a et b pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$.

Exercice 5. 1)Montrer que l'on a

$$x\cos(x) - \sin(x) < 0, \quad \text{si} \quad x \in]0, \pi[.$$

2) Étudier le sens de variation de la fonction $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ sur $]0, \pi]$.
3) En déduire que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a

$$\frac{2x}{\pi} < \sin(x) < x.$$

Exercice 6. En calculant la dérivée de $f(x) = (x^2+1)\sin(x)$, montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[0, \pi]$.

Exercice 7. 1) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\frac{1}{1+x} < \ln(1+x) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$

2) Cacluler $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\ln(1+x) - \ln(x))$.
3) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$.
4) Caculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-\frac{1}{x})^x$.

II) **Fonctions élémentaires**

Exercice 8. 1) Montrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$\sin(x) = \frac{\tan(x)}{\sqrt{1+\tan(x)^2}} \quad \text{et} \quad \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan(x)^2}}.$$

2) Montrer que

$$0 < \arctan(\frac{3}{4}) + \arctan(\frac{5}{12}) < \frac{\pi}{2}$$

3) Résoudre $\arcsin(x) = \arctan(\frac{3}{4}) + \arctan(\frac{5}{12})$.

Exercice 9. Étudier les fonctions suivantes puis tracer leurs courbes représentatives

$$1) f(x) = \arctan(\frac{x}{1-x^2}), \qquad 2) f(x) = \tanh(\frac{1}{x}).$$

Exercice 10. 1)Donner la dérivée des fonctions $\arcsin(x)$ et $\arccos(x)$.
2) En déduire que

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 11. Les réels x et y étant liés par :$x = \ln[\tan(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4})]$.
Calculer $\cosh(x)$ et $\sinh(x)$.

Exercice 12. 1) Calculer

$$\cosh(\frac{1}{2}\ln(3)) \qquad \sinh(\frac{1}{2}\ln(3)).$$

2) Montrer que

$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y).$$

3) En déduire les solutions de l'équation

$$2\cosh(x) + \sinh(x) = \sqrt{3}\cosh(5x).$$

Exercice 13. Résoudre les équations suivantes

$$1)\cosh(x) = \sqrt{5}, \qquad 2)\cos(x) + \sin(x) = \frac{\pi}{2}, \qquad 3)\ln(\cosh(x)) = 2.$$