

Licence 1ère année MI, 2019–2020

ANALYSE1

Fiche de TD 3 : Les suites réelles.

Exercice 1. En utilisant la définition de la convergence d'une suite, vérifier que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3n}}{2n-1} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exercice 2. Déterminer les limites des suites numériques suivantes

$$\begin{aligned} 1) \lim_{n \rightarrow +\infty} n - \sqrt{(n+1)(n-2)} & \quad 2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}} & 3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n + \ln(n))}{\ln(2n + \ln(n))} \\ 4) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} \right), & 5) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos(n)}{n^3 + 1}, & 6) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(\sqrt{|a + bn + 4\pi^2 n^2|}) \end{aligned}$$

Exercice 3. I) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

II) On rappelle que la partie entière d'un nombre réel α est l'unique entier, noté $E(\alpha)$, vérifiant $E(\alpha) \leq \alpha < E(\alpha) + 1$. Etablir que $\alpha - 1 < E(\alpha) \leq \alpha$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{E(\pi) + E(2\pi) + \dots + E(n\pi)}{n^2}.$$

1) Montrer que l'on a l'encadrement

$$\frac{\pi(n+1) - 2}{2n} < u_n \leq \frac{\pi(n+1)}{2n}.$$

2) Dédire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 4. Considérons une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n^2 + 2u_n + 1}{2u_n + 1}.$$

On suppose que $u_0 \in \mathbb{R}^+$.

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

2) Établir que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n + \frac{1}{2}$ puis que $u_n \geq u_0 + \frac{n}{2}$.

3) En déduire la limite de la suite $(u_n)_n$.

Exercice 5. Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies pour tout $n \geq 1$ par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n^2}$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 6. Soit u_0 et u_1 deux nombres réels. On définit une suite (u_n) en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = \frac{u_n + u_{n+1}}{2}.$$

- 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| = \frac{|u_1 - u_0|}{2^n}$.
- 2) Montrer que pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, si $p \geq n + 2$, alors u_p est entre u_n et u_{n+1} .
- 3) En déduire que (u_n) est une suite de Cauchy.
- 4) Calculer la limite de (u_n) en fonction de u_0 et u_1 .

Exercice 7. Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle croissante et converge vers L . On pose

$$w_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}.$$

- 1) Montrer que w_n est croissante majorée.
- 2) Établir que $w_{2n} \geq \frac{u_n + w_n}{2}$, puis déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = L$.

Exercice 8. (Facultatif) Déterminer (quand elle existe) la limite, quand $n \rightarrow +\infty$, des suites numériques suivantes :

$$\begin{aligned} 1) U_n &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, & 2) U_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \\ 3) U_n &= \frac{\ln(n)}{2\sqrt{n}}, & 4) U_n &= \frac{2n^3 + n^2 + 1}{-n^3 + n + 1}, \\ 5) U_n &= \frac{\sin(n)}{n^2 + 1}, & 6) U_n &= \frac{2n + 1 - \cos n\pi}{n}. \end{aligned}$$

Exercice 9. (Facultatif) Soit (U_n) la suite définie par

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n + 2}{3U_n + 2} \end{cases}, \quad \forall n \geq 0.$$

- 1) Montrer que $\forall n \geq 0, U_n > 0$.
- 2) Vérifier que l'équation $x = \frac{x+2}{3x+2}$ n'admet qu'une solution positive a .
- 3) Montrer que $\forall n \geq 0, |U_n - a| \leq \frac{1}{2^n}$. En déduire la limite de la suite (U_n) .

Exercice 10. (Facultatif) Soient (U_n) et (V_n) deux suites définie par $U_0 > V_0 > 0$ et par les relations de récurrence :

$$U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}, \quad V_{n+1} = \sqrt{U_n V_n}.$$

- a) Montrer que $\forall n \geq 0$, on a $U_n \geq 0, V_n \geq 0$ et $U_n \geq V_n$.
- b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante minorée et la suite (V_n) est croissante majorée.
- c) Montrer que les suites (U_n) et (V_n) sont convergentes.
- d) Montrer que la suite (W_n) définie par $W_n = U_n - V_n$ a pour limite 0. En déduire que les suites (U_n) et (V_n) ont la même limite.

Exercice 11. (Facultatif) Soient $k \in]0, 1[$, et la suite (U_n) qui vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+2} - U_{n+1}| \leq k |U_{n+1} - U_n|.$$

- 1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - U_n| \leq k^n |U_1 - U_0|.$$

- 2) Montre que si p et q deux entiers tels que $p > q \geq 0$, alors

$$|U_p - U_q| \leq \frac{k^q}{1 - k} |U_1 - U_0|.$$

- 3) Déduire que la suite (U_n) est de Cauchy, et par suite convergente.