

Licence 1ère année MI, 2019–2020

ANALYSE1

Fiche de TD 1 : Les nombres réels.

Exercice 1. 1) Soit $m_n = 0.20192019\dots2019$ (n fois).

Écrire m_n sous la forme $\frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$.

2) Soit $m = 0.20192019\dots$ (une infinité de fois).

Écrire m sous la forme $\frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$.

Exercice 2. On rappelle que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

1) Montrer que $a = 6 + 4\sqrt{2}$ et $b = 6 - 4\sqrt{2}$ sont irrationnels.

2) Calculer \sqrt{ab} .

3) Montrer que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est rationnel.

Exercice 3. On suppose que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{6}$ sont irrationnels. Montrer que

1) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.

2) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$ est irrationnel.

Exercice 4. Pour chacun des sous-ensembles suivants, donner sa borne supérieure et sa borne inférieure dans \mathbb{R} (si elle existe), et préciser s'il a un maximum, un minimum.

$$A =]0, 2], \quad B =]1, 2[\cap \mathbb{Q}, \quad C = \left\{ 5 - \frac{2}{\sqrt{n}}, \quad n \in \mathbb{N}^* \right\},$$

$$D = \left\{ (-1)^n n - \frac{3}{n} - n, \quad n \in \mathbb{N}^* \right\}, \quad E = \left\{ x \in \mathbb{Q}, \quad |x - \sqrt{2}| \leq \sqrt{2} \right\}.$$

Exercice 5. Soit $A = \{x^2 + y^2, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \text{ et } xy = 1\}$.

1) Montrer que A possède une borne inférieure que l'on déterminera.

2) A possède-t-elle une borne supérieure ?

Exercice 6. Trouver les solutions dans \mathbb{R} de l'équation suivante

$$|x - 1| + |x - 2| = 2.$$

Exercice 7. I) Soient x et y deux réels.

1) Montrer que

$$E(x) + E(y) \leq E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 1.$$

2) Montrer que $E\left(\frac{1}{n}E(nx)\right) = E(x)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

II) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \frac{|x|}{1 + |x|}.$$

Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y).$$

Exercice 8. (Facultatif) Démontrer que les réels suivants sont irrationnels.

- 1) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, où a et b sont des entiers positifs tels que \sqrt{a} et \sqrt{b} sont irrationnels.
- 2) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

Exercice 9. (Facultatif) Pour chacun des sous-ensembles suivants, donner sa borne supérieure et sa borne inférieure dans \mathbb{R} (si elle existe), et préciser s'il a un maximum, un minimum.

$$A = \{x \in \mathbb{R}, x^4 - x^2 - 1 < 0\}, \quad B = \left\{ \frac{x+1}{x+2}, \quad x \in \mathbb{R}, x \leq -3 \right\}.$$

Exercice 10. (Facultatif) Résoudre dans \mathbb{R} , l'inéquation suivante

$$|2x^2 - 1| \leq |x + 1|$$