Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2019-2020

1ère Année LMD Mathématique et Informatique — Algèbre 1

Fiche de TD 3 : Relations binaires

Exercice 1 :

Soit $\mathcal{R}$, la relation définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de x pour tout réel x.
3. Déterminer l'ensemble quotient.

Exercice 2 :

Soit $\mathcal{R}$, la relation définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{x^2} = y^2 - \frac{1}{y^2}.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de $a \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 3 :

Soit dans $\mathbb{R}^2$ la relation définie par :

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Leftrightarrow (x \leqslant x' \text{ et } y \leqslant y').$$

1. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre. L'ordre est-il total ?
2. Préciser deux majorants, deux minorants, la borne supérieure et la borne inférieure de la partie $A = \{(1, 2), (3, 1)\}$.
3. La partie A possède t-elle un plus grand élément et un plus petit élément ?

Exercice 4 :

On définit dans $\mathbb{Z}$ la relation $\mathcal{S}$ par :

$$a\mathcal{S}b \Leftrightarrow a \leqslant b + 1.$$

1. Vérifier que $0\mathcal{S}1$ et $1\mathcal{S}0$. Donner une conclusion.
2. Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{Z}$ par :

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a < b + 1.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 5 :(SUPP)

Soit E un ensemble et $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ une partition de E. On définit la relation binaire $\mathcal{R}$ dans E en posant, pour tout couple $(x, y) \in E^2$:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists i \in \{1, 2, ..., n\}, \text{ tel que } (x \in X_i \text{ et } y \in X_i).$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer les classes d'équivalences modulo $\mathcal{R}$.

Exercice 6 :(SUPP)

Soit Φ une relation définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$x\Phi y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*/x^n = y.$$

1. Montrer que Φ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.
2. Cet ordre est-il total ?
3. Soit $A = \{1, 4, 8\}$. Déterminer s'ils existent Max$A$ et Min$A$ par la relation d'ordre Φ.