Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2019-2020

1ère Année LMD Mathématique et Informatique — Algèbre 1

Fiche de TD 2 : Ensembles et Applications

Exercice 1 :

Soit A un ensemble, et X, Y et Z des parties de A. Démontrer les propriétés suivantes :

a. $C_A(C_A(X)) = X$.

b. $C_A(X \cup Y) = C_A(X) \cap C_A(Y)$ et $C_A(X \cap Y) = C_A(X) \cup C_A(Y)$.

c. $X \subset Y \Leftrightarrow C_A(Y) \subset C_A(X)$.

Exercice 2 :

Soient A et B deux ensembles.

1. Démontrer que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
2. Démontrer que $\mathcal{P}(A \cup B) \supset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. Y a-t-il égalité ?

Exercice 3 :

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E. On définit la différence symétrique de A et de B par :

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

a. Que valent $A \Delta A$ et $A \Delta \emptyset$?

b. Montrer que $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

c. Montrer que $A \Delta B = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.

d. Montrer que $(A \Delta B) \Delta B = A$.

Exercice 4 :

Soit f une application de E vers F. Soient A et A' des parties de E. Soient B et B' des parties de F. Montrer que :

$$1) A \subset f^{-1}(f(A)) \qquad 2) f(f^{-1}(B)) \subset B$$
$$3) f(A \cup A') = f(A) \cup f(A') \qquad 4)\ f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$$
$$5) f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B') \quad 6) f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$$

Montrer que si f est injective alors on a l'égalité dans 4).

Exercice 5 :

Les applications suivantes sont elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $f(x) = 2x$.
2. g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $g(x) = 2x + 1$.
3. h de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $h(x) = |x| - [x]$.
4. u de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par $u(x) = \sqrt{x}$.

Exercice 6 :
Soit h l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$.
1. Vérifier que pour tout réel a non nul on a $h(a) = h(\dfrac{1}{a})$. L'application h est-elle injective ?
2. Soit f définie sur $I = [1, +\infty[$ par $f(x) = h(x)$.
a. Montrer que f est injective.
b. Vérifier que : $\forall x \in I, f(x) \leqslant 2$.
c. Montrer que f est une bijection de I sur $]0, 2]$ et trouver f^{-1}.
Exercice 7 : (SUPP)
Soient E, F, G trois ensembles, $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications.
a. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
b. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.