

1^{ère} année M.I - Semestre 1
Examen de rattrapage : Analyse 1
Durée : 1h30mn

Aucun document n'est autorisé.
L'usage de tout appareil électronique est strictement interdit.

Exercice 1. (5 Pts)

Soit E l'ensemble suivant

$$E = \{x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{2-x} > x\}.$$

- 1) Déterminer l'ensemble E .
- 2) Déterminer, s'il existe, $\inf(E)$, $\min(E)$, $\sup(E)$ et $\max(E)$.

Exercice 2. (8 Pts)

Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\begin{cases} U_1 = 1, U_2 = 2 \\ U_n = \frac{1}{2}(U_{n-1} + U_{n-2}), \quad n \geq 3. \end{cases}$$

- 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 \leq U_n \leq 2$.
- 2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |U_{n+1} - U_n| = \frac{1}{2^{n-1}}$.
- 3) Montrer que $(U_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et $(U_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
- 4) En déduire que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Exercice 3. (7 Pts)

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{si } x < 1, \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

- 1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
- 2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- 3) En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer qu'il existe $c \in]0, 2[$ tel que

$$2f'(c) = f(2) - f(0).$$

- 4) Déterminer toutes les valeurs possible de c .

1^{ère} année M.I - Semestre 1
Corrigé de l'examen de rattrapage : Analyse 1
Durée : 1h30mn

Exercice 1. (5 Pts).

On a $E = \{x \in \mathbb{R}, \sqrt{2-x} > x\}$.

Il y a deux situations à analyser.

1)

$$\begin{cases} 2 \geq x \geq 0 \\ 2 - x > x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \geq x \geq 0 \\ x^2 + x - 2 < 0 \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ -2 < x < 1 \end{cases} \quad (1\text{Pt})$$

Donc, $0 \leq x < 1$.

2)

$$\begin{cases} x < 0 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x < 0 \quad (1\text{Pt})$$

On a alors, $E =]-\infty, 0[\cup [0, 1[=]-\infty, 1[$ (1 Pt)

2) $\inf(E)$ n'existe pas, $\min(E)$ n'existe pas. (1 Pt)

$\sup(E) = 1$, $\max(E)$ n'existe pas. (1 Pt).

Exercice 2. (8 Pts).

1) On remarque que la relation est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$. Alors, par récurrence, supposons que $1 \leq U_n \leq 2$ pour un certain rang n et montrons que

$$1 \leq U_{n+1} \leq 2.$$

On a $1 \leq U_n \leq 2$ et $1 \leq U_{n-1} \leq 2$,
 alors $2 \leq U_n + U_{n-1} \leq 4$, ce qui implique que

$$1 \leq U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + U_{n-1}) \leq 2. \quad (1.5\text{Pts})$$

2) Pour $n = 1$,

$$|U_2 - U_1| = |2 - 1| = 1 = \frac{1}{2^0}.$$

Supposons que $|U_{n+1} - U_n| = \frac{1}{2^{n-1}}$ est vraie pour un certain rang n et montrons que

$$|U_{n+2} - U_{n+1}| = \frac{1}{2^n}.$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} |U_{n+2} - U_{n+1}| &= \left| \frac{1}{2}(U_{n+1} + U_n) - U_{n+1} \right| \\ &= \frac{1}{2} |U_{n+1} - U_n| = \frac{1}{2} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}. \end{aligned} \quad (1.5\text{Pts})$$

3) On a

$$\begin{aligned}U_{2n+2} - U_{2n} &= \frac{1}{2}(U_{2n+1} + U_{2n}) - U_{2n} \\&= \frac{1}{2}(U_{2n+1} - U_{2n}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(U_{2n} + U_{2n-1}) - U_{2n}\right) \\&= -\frac{1}{2^2}(U_{2n} - U_{2n-1}) = \dots = \frac{-1}{2^{2n}}(U_2 - U_1) = \frac{-1}{2^n} < 0.\end{aligned}$$

Ainsi, U_{2n} est décroissante. (1.5 Pts)

D'autre part,

$$\begin{aligned}U_{2n+3} - U_{2n+1} &= \frac{1}{2}(U_{2n+2} - U_{2n+1}) \\&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(U_{2n+2} + U_{2n}) - U_{2n+1}\right) = -\frac{1}{2}\frac{1}{2}(U_{2n+1} - U_{2n}) \\&= \frac{1}{2^{2n+1}} > 0.\end{aligned}$$

Ainsi, (U_{2n+1}) est croissante. (1.5 Pts)

4) Remarquons que

$$|U_{2n+1} - U_{2n}| = \frac{1}{2^{n-1}} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_{2n+1} - U_{2n}) = 0$.

Puisque (U_{2n+1}) est croissante et (U_{2n}) est décroissante, alors les deux suites sont adjacentes. Donc, elle convergent vers la même limite. Ceci implique que (U_n) est convergente. (2 Pts)

Exercice 3. (7 Pts).

1) Pour $x < 1$, f est un polynôme et donc f est continue. (0.25 Pt)

Pour $x \geq 1$, $x \neq 0$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue. (0.25 Pt) Il reste le point $x = 1$.

On a

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1 = f(1) \quad (0.5 \text{Pt})$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3 - x^2}{2} = 1 = f(1). \quad (0.5 \text{Pt})$$

Ceci prouve que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) On remarque que si $x \neq 1$, alors la fonction f est dérivable. (0.5 Pt)

La dérivabilité en $x = 1$.

Pour $x < 1$, on a

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{3-x^2}{2} - 1}{x - 1} \\&= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2 - 1)}{x - 1} = -1 \quad (1 \text{Pt})\end{aligned}$$

Pour $x \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} \\&= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - x}{x(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{x} = -1 \quad (1 \text{Pt})\end{aligned}$$

Ceci prouve que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3) Théorème des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Puisque notre fonction f est continue sur $[0, 2]$ et dérivable sur $]0, 2[$, alors d'après le théorème précédent, il existe $c \in]0, 2[$ tel que

$$f(2) - f(0) = (2 - 0)f'(c). \quad (1\text{Pt})$$

4) On a $f(2) = \frac{1}{2}$ et $f(0) = \frac{3}{2}$. **(0.5 Pt)**

Par conséquent,

$$f(2) - f(0) = 2f'(c) \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 2f'(c)$$

$$\Leftrightarrow f'(c) = -\frac{1}{2} \quad (0.5\text{Pt})$$

Pour $0 < c \leq 1$, on a

$$f'(c) = -c = -\frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{1}{2} \quad (0.5\text{Pt})$$

Pour $1 < c < 2$, on a

$$f'(c) = -\frac{1}{c^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow c^2 = 2$$

$$\Rightarrow c = \pm\sqrt{2}.$$

Puisque $-\sqrt{2}$ n'appartient pas à $]1, 2[$, alors $c = \sqrt{2}$. **(0.5 Pt)**