Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2019-2020

Date : 17/11/2020

1ère Année LMD MI — Durée : 01H30.

Epreuve de Rattrapage : Algèbre 1

Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits

Exercice 1 : (05 points)

Montrer par récurrence ce qui suit :

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) \;=\; (2(1)-1)+(2(2)-1)+...+(2(n)-1)=n^2.$$

Exercice 2 : (07 points)

Soit $\mathcal{R}$, la relation définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x-\frac{1}{x}=y-\frac{1}{y}.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de $a \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 3 : (08 points)

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

1. Calculer $f(\frac{1}{2}), f(2), f(0)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=-2$.
3. Déterminer l'image directe de $\mathbb{R}$.
4. L'application f est-elle injective ? surjective ? Justifier.
5. Montrer que l'application $g:\big[-1;+1\big]\to\big[-1;+1\big]$ définie par $g(x)=f(x)$ est une bijection et donner sa réciproque.

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen **Année Universitaire 2019-2020**
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques **Date : 17/11/2020**

1ère Année LMD MI Durée : 01H30.

Epreuve de Rattrapage : Algèbre 1

Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits

---

Exercice 1 : (05 points)

Montrer par récurrence ce qui suit :

$$(P_n) : \underbrace{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}_{A_n} = (2(1)-1) + (2(2)-1) + \ldots + (2(n)-1) = n^2 = B_n$$

• pour $n=1$, (P_1) est vraie car :

$$\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2(1)-1 = 1 = 1^2$$ 01pt

01pt Supposons que (P_n) est vraie, Mq (P_{n+1}) est vraie

$$A_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2(n+1)-1)$$ 01pt

01pt $$\overset{H.R}{=} n^2 + 2n+1$$

$$= (n+1)^2$$

$$= B_{n+1}.$$ 01pt

Exercice 2 : (07 points)

Soit $\mathcal{R}$, la relation définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y}.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de $a \in \mathbb{R}^*$.

1,5 pt

$\mathcal{R}$ relation d'équivalence $\Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{R} \text{ réflexive} \\ \mathcal{R} \text{ symétrique} \\ \mathcal{R} \text{ transitive} \end{cases}$

1- pour $x \in \mathbb{R}^*$ $x\mathcal{R}x \Rightarrow x - \frac{1}{x} = x - \frac{1}{x}$

$\Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow \mathcal{R}$ réflexive 0,5 pt

pour $x, y \in \mathbb{R}^*$ $x\mathcal{R}y \Rightarrow x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} \Rightarrow y - \frac{1}{y} = x - \frac{1}{x}$

$\Rightarrow y\mathcal{R}x$ 0,5 pt

$\Rightarrow \mathcal{R}$ symétrique

pour $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ $\begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} \\ y - \frac{1}{y} = z - \frac{1}{z} \end{cases}$

$\Rightarrow x - \frac{1}{x} = z - \frac{1}{z}$

$\Rightarrow \mathcal{R}$ transitive. 0,5 pt

Cl : $\mathcal{R}$ relation d'équivalence. 0,5 pt

2. $\dot{a} = \{ x \in \mathbb{R}^* \mid x \mathcal{R} a \}$ 01pt

$$x \mathcal{R} a \Rightarrow x - \frac{1}{x} = a - \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow x - a = \frac{1}{x} - \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow x - a = \frac{a - x}{xa}$$

$$\Rightarrow x - a - \frac{a - x}{xa} = 0$$

$$\Rightarrow (x - a)\left[1 + \frac{1}{xa}\right] = 0$$ 0,5pt

$$\Rightarrow (x - a)\left(\frac{xa + 1}{xa}\right) = 0$$

$$\Rightarrow x - a = 0 \quad \vee \quad xa + 1 = 0$$

0,5pt 0,5pt

$$\Rightarrow x = a \quad \vee \quad x = -\frac{1}{a}$$

<u>d</u>; $\dot{a} = \left\{ a, -\frac{1}{a} \right\}$ 01pt

Exercice 3 : (08 points)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

1. Calculer $f(\frac{1}{2}), f(2), f(0)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = -2$.
3. Déterminer l'image directe de $\mathbb{R}$.
4. L'application f est-elle injective ? surjective ? Justifier.
5. Montrer que l'application $g : [-1;+1] \to [-1;+1]$ définie par $g(x) = f(x)$ est une bijection et donner sa réciproque.

0,5pt 0,5pt 0,5pt

1 – $f(0) = 0$, $f(2) = \dfrac{4}{5}$, $f(1/2) = \dfrac{4}{5}$

2 – $f(x) = -2 \Rightarrow \dfrac{2x}{1+x^2} = -2$

$\Rightarrow 2x = -2 - 2x^2$

$\Rightarrow 2(1+x+x^2) = 0$

$\Rightarrow 1+x+x^2 = 0$

$\Delta < 0 \Rightarrow$ pas de solution ds $\mathbb{R}$

$\Rightarrow S = \emptyset$ 0,5pt

3- $f(\mathbb{R}) = ?$ $(1+x)^2 = 1+x^2+2x \geq 0$

$$\Rightarrow 1+x^2 \geq -2x$$

$$\Rightarrow 1 \geq \frac{-2x}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow -1 \leq \frac{2x}{1+x^2} = f(x)$$

la même chose pour $(1-x)^2 = 1+x^2-2x \geq 0$

On trouve : $f(x) = \frac{2x}{1+x^2} \leq 1$

d'où : $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ 0,2pt

4. D'après 1/ f n'est pas injective

0,5pt car $f(1/2) = f(2)$ mais $1/2 \neq 2$.

et d'après 2/ $\nexists x \in \mathbb{R} \mid f(x) = -2$

donc f n'est pas surjective. 0,5pt

5. $g : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1] \,/\, g(x) = f(x)$

Montrons que : g est injective :

$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow \frac{2x_1}{1+x_1^2} = \frac{2x_2}{1+x_2^2}$$

$$\Rightarrow 2x_1(1+x_2^2) = 2x_2(1+x_1^2)$$

$$\Rightarrow x_1 + x_1x_2^2 = x_2 + x_2x_1^2$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = x_2x_1^2 - x_1x_2^2$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = x_1x_2(x_1 - x_2)$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 - (x_1 - x_2)(x_1x_2) = 0$$

0,5pt
$$\Rightarrow (x_1 - x_2)\left[1 - x_1x_2\right] = 0$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2) = 0 \lor \underbrace{x_1x_2 = 1}$$

$$\Downarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \qquad\qquad x_1 = x_2 = 1 \text{ ou } x_1 = x_2 = -1$$

donc g est injective.

Montrons que g est surjective:

On résoud l'équation $y = \frac{2x}{1+x^2}$

$\Rightarrow \quad yx^2 - 2x + y = 0$

$\Delta_y = 4 - 4y^2 = 4(1-y^2) \geq 0$

car $y \in [-1,1]$.

donc l'équation $y = g(x)$ admet 2

solutions $\quad x_1 = \frac{1 - \sqrt{1-y^2}}{y}$

$(y \neq 0)$

OK, 1 pt

$x_2 = \frac{1 + \sqrt{1-y^2}}{y} \notin [-1,1]$

si $y = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow g$ est surjective

Cl: g est bijective.