Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2019/2020

جامعة أبو بكر بلقايد
UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

1ère année M.I - Semestre 1

Examen final : Analyse 1

Durée : 1h30mn

Aucun document n'est autorisé.
L'usage de tout appareil électronique est strictement interdit.

Questions de cours : (3 Pts)

1) Citer le théorème des valeurs intermédiaires.
2) Citer le théorème de Rolle.

Exercice 1. (7 Pts)

I) En utilisant le théorème des accroissements finis, calculer

$$\lim_{x\to+\infty} x^3\left(e^{\frac{1}{x^2}} - e^{\frac{1}{(x+1)^2}}\right).$$

II) Soit la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} - x$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2) Calculer f' et f''.
3) Montrer que $f''(x) > 0$ pour tout $x > 0$ et en déduire que la fonction f est croissante.
4) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

Exercice 2. (6 Pts)

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x-1|}{x+1} & \text{si } \ x > 0, \\ x^2 - a & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

1) Déterminer la valeur du paramètre a pour que la fonction f soit continue.
2) Étudier la dérivabilité de la fonction f.

Exercice 3. (4 Pts)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique définie par

$$u_0 = 1, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right), \quad t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right].$$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire qu'elle converge.

Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2019/2020

1ère année M.I - Semestre 1

Corrigé de l'examen final : Analyse 1

Durée : 1h30mn

Questions de cours : (3 Pts)

1) Le théorème des valeurs intermédiaires

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $f(a).f(b) \leq 0$. **(0.5 Pt)**
Alors il existe $c \in]a, b[$ vérifiant $f(c) = 0$. **(1 Pt)**.

2) Le théorème de Rolle.

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ **(0.5 Pt)** et si $f(a) = f(b)$, **(0.5 Pt)** alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$. **(0.5 Pt)**

Exercice 1. (7 Pts).

I) Soit $f(t) = e^{\frac{1}{t^2}}$. La fonction f est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
En utilisant le théorème des accroissements finis entre x et $x + 1$ avec $x > 0$, on trouve qu'il existe $c \in]x, x + 1[$ tel que

$$f(x + 1) - f(x) = f'(c). \qquad \mathbf{(1Pt)}$$

Sachant que pour $t \neq 0$, $f'(t) = \frac{-2}{t^3} e^{\frac{1}{t^2}}$, **(0.25 Pt)** alors

$$e^{\frac{1}{(x+1)^2}} - e^{\frac{1}{x^2}} = \frac{-2}{c^3} e^{\frac{1}{c^2}}.$$

Ceci implique que

$$x^3 \left(e^{\frac{1}{x^2}} - e^{\frac{1}{(x+1)^2}} \right) = \frac{2x^3}{c^3} e^{\frac{1}{c^2}}. \qquad \mathbf{(0.25Pt)}$$

Puisque $0 < x \leq c \leq x + 1$, alors $x^2 \leq c^2 \leq (x + 1)^2 \Rightarrow \frac{1}{(x+1)^2} \leq \frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{x^2}$. **(0.25 Pt)**
On sait aussi que $t \to e^t$ est une fonction croissante, alors $e^{\frac{1}{(x+1)^2}} \leq e^{\frac{1}{c^2}} \leq e^{\frac{1}{x^2}}$ **(0.25 Pt)**
D'autre part, on a

$$\frac{1}{(x + 1)^3} \leq \frac{1}{c^3} \leq \frac{1}{x^3} \Rightarrow \frac{2x^3}{(x + 1)^3} \leq \frac{2x^3}{c^3} \leq \frac{2x^3}{x^3}. \quad \mathbf{(0.25Pt)}$$

Ainsi,

$$\frac{2x^3}{(x + 1)^3} e^{\frac{1}{(x+1)^3}} \leq \frac{2x^3}{c^3} e^{\frac{1}{c^2}} \leq 2e^{\frac{1}{x^2}}. \quad \mathbf{(0.25Pt)}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} 2e^{\frac{1}{x^2}} = 2$ **(0.25 Pt)** et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{(x + 1)^3} e^{\frac{1}{(x+1)^3}} = 2$ **(0.25 Pt)**, alors par le théorème d'encadrement **(0.25 Pt)**, on a

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 \left(e^{\frac{1}{x^2}} - e^{\frac{1}{(x+1)^2}} \right) = 2. \quad \mathbf{(0.25Pt)}$$

II) Soit $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} - x$.
1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} - x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x}{2}} \left(1 - e^{-x} - \frac{x}{e^{x/2}} \right) = +\infty. \quad$ **(0.5 Pt)**

2)On a

$$f'(x) = \frac{1}{2}e^{x/2} + \frac{1}{2}e^{-x/2} - 1, \quad (\mathbf{0.25Pt})$$

et

$$f''(x) = \frac{1}{4}e^{x/2} - \frac{1}{4}e^{-x/2}. \quad (\mathbf{0.25Pt})$$

3) On a $\forall x > 0,\ e^{x/2} > e^{-x/2}$ qui implique que $\frac{1}{4}(e^{x/2} - e^{-x/2}) > 0$.
Donc, $f''(x) > 0$, pour tout $x > 0$. Ainsi, f' est croissante sur $]0, +\infty[$. $(\mathbf{0.5\ Pt})$.
Puisque $f'(0) = 0$, $(\mathbf{0.5\ Pt})$ alors pour tout $x > 0$, on a $f'(x) > 0$. ceci implique que f est croissante. $(\mathbf{0.5\ Pt})$
4)Remarquons que $f(0) = 0$, $(\mathbf{0.5\ Pt})$ alors on a le tableau de variation $(\mathbf{0.5\ Pt})$ suivant

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$

Exercice 2. (6 Pts)
Nous remarquons que la fonction f peut s'écrire comme

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x+1} & \text{si } x \geq 1, \\ \frac{1-x}{x+1} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ x^2 - a & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

La fonction f est continue sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. $(\mathbf{0.5\ Pt})$ Le seul point qui donne problème à la continuité de f est 0. $(\mathbf{0.5\ Pt})$ Pour cela, on calcule les limites à droite et à gauche en 0. On obtient

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-x}{x+1} = 1 \quad (\mathbf{0.5Pt}) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 - a = -a \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Ainsi, f est continue en 0, si et seulement si $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$. Donc $a = -1$. $(\mathbf{0.5\ Pt})$
2) Pour étudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$, il faut que f soit continue sur $\mathbb{R}$, donc $a = -1$.
Nous remarquons que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Seuls les points 0 et 1 qu'il faut étudier la dérivabilité.$(\mathbf{0.5\ Pt})$
Pour cela, on calcule la limite du taux de variation à droite et à gauche en 0 et 1. On obtient

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1-x}{x+1} - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x}{x(x+1)} = -2 \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 + 1 - 1}{x} = 0.(\mathbf{0.5Pt})$$

Puique les limites à droite et à gauche du taux de variation sont différentes, alors f n'est pas dérivable en 0. $(\mathbf{0.5\ Pt})$.
Pour le point 1, on a

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{x-1}{x+1}}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{1-x}{x+1}}{x - 1} = \frac{-1}{x+1} = -\frac{1}{2} \quad (\mathbf{0.5Pt}).$$

Ainsi, f n'est pas dérivable en 1. $(\mathbf{0.5\ Pt})$.

Exercice 3. (4 Pts)

1)Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 = 1, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right), \quad t \in]0, \frac{\pi}{2}].$$

On remarque que $u_0 = 1 > 0$. **(0.25 Pt)** Alors par récurrence, supposons que $u_n > 0$ pour un certain rang n et montrons que $u_{n+1} > 0$. **(0.5 Pt)**
Puisque $0 < t < \frac{\pi}{2}$ et $\frac{1}{2^{n+1}} < 1$, alors $0 < \frac{t}{2^{n+1}} < \frac{\pi}{2}$. **(1Pt)** Ceci implique que $\cos(\frac{t}{2^{n+1}}) > 0$.**(0.5 Pt)**
Ainsi, $u_{n+1} = u_n \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) > 0$. **(0.25 Pt)**. Ceci implique que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2) Pour tout $n \geq 0$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) < 1, \quad \text{pour} \quad t \in]0, \frac{\pi}{2}]. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Ceci implique que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$. Donc (u_n) est décroissante.**(0.5 Pt)**
Ainsi, on remarque que (u_n) est minorée par 0 et décroissante, donc (u_n) converge.**(0.5 Pt)**