Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2019/2020

1ère année M.I - Semestre 1

Contrôle continu : Analyse 1

Durée : 1h30mn

Aucun document n'est autorisé.
L'usage de tout appareil électronique est strictement interdit.

Questions de cours : (3 Pts)

1) Donner la définition d'une suite bornée.
2) Donner un exemple d'une suite bornée qui converge.
3) Donner un exemple d'une suite bornée qui diverge.

Exercice 1. (8 Pts)

Partie 1)

Soit $a > 0$. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ avec $u_0 > 0$ par la relation de récurrence suivante

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n}).$$

1) Montrer que $u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2-a)^2}{4u_n^2}$.
2) Montrer que si $n \geq 1$, alors $u_n \geq \sqrt{a}$.
3) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{a}$.

Partie 2)

Calculer les limites suivantes

$$1) \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 - n + \sin(n)}{5n^2 + n + 1}, \qquad 2) \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{e^{-n}(\pi\alpha)^n}, \quad \alpha > 1.$$

Exercice 2. (5 Pts)

On considère le nombre complexe

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

1) Calculer les racines carrées de z.
2) Donner le module et l'argument de z et écrire z sous la forme exponentielle.
3) En déduire les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$.

Exercice 3. (4 Pts)

1) Montrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$, alors $r + x \notin \mathbb{Q}$.
2) Montrer que si $r \in \mathbb{Q}^*$ et $x \notin \mathbb{Q}$, alors $r.x \notin \mathbb{Q}$.
3) Soient r_1 et r_2 deux rationnels tels que $r_1 < r_2$.

a) En déduire que $x = r_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(r_2 - r_1)$ est irrationnel.
b) En déduire qu'entre deux rationnels disctincts, il y a au moins un irrationnel.

Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2019/2020

1$^{\text{ère}}$ année M.I - Semestre 1

Corrigé du contrôle continu : Analyse 1

Durée : 1h30mn

Questions de cours : (3 Pts)

1) Une suite (u_n) est dite bornée si elle est majorée et minorée, ce qui revient à dire que

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M. \quad (\mathbf{1Pt})$$

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n = \frac{1}{n+1}$ **(0.25 Pt)**.
Remarquons que (u_n) est bornée car $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < \frac{1}{n+1} \leq 1$ **(0.5 Pt)** et (u_n) converge car $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$. **(0.25 Pt)**

3) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n = (-1)^n$. **(0.25 Pt)**.
Remarquons que (u_n) est bornée car $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ **(0.5 Pt)** et elle est divergente puisque elle n'a pas de limite. **(0.25 Pt)**

Exercice 1. (8 Pts) **Partie 1**

1) On a

$$\begin{aligned}
u_{n+1}^2 - a &= \left(\frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n})\right)^2 - a \\
&= \frac{1}{4}(u_n^2 + 2a + \frac{a^2}{u_n^2}) - a = \frac{1}{4}(u_n^2 + 2a + \frac{a^2}{u_n^2} - 4a) \\
&= \frac{1}{4}(u_n^2 - 2a + \frac{a^2}{u_n^2}) \quad (\mathbf{0.5Pt}) \\
&= \frac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2}. \quad (\mathbf{0.5Pt})
\end{aligned}$$

2) Pour tout $n \geq 0$, on a $u_{n+1}^2 - a \geq 0$. Donc, pour tout $n \geq 1$, on a $u_n^2 - a \geq 0$ qui implique que $u_n^2 \geq a$. **(1Pt)**.
D'autre part, on sait que $u_0 > 0$. Alors, par récurrence, supposons que $u_n > 0$ pour un certain rang n et montrons que $u_{n+1} > 0$. Par définition, on a

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n}) > 0.$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. **(0.75 Pt)**
Ce qui implique que $u_n \geq \sqrt{a}$. **(0.25 Pt)**

3) Remarquons que d'après la question précédente, la suite (u_n) est minorée par $\sqrt{a}$. **(0.5 Pt)**
D'autre part, pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(n_n + \frac{a}{u_n}) - u_n = \frac{u_n^2 + a - 2u_n^2}{2u_n} = \frac{a - u_n^2}{2u_n} \leq 0.$$

Donc, (u_n) est décroissante. **(0.5 Pt)**.
Puisque la suite (u_n) est minorée et décroissante, alors (u_n) converge vers une limite l. **(0.5 Pt)**
Cette limite vérifie

$$\begin{aligned}
l = \frac{1}{2}(l + \frac{a}{l}) &\Rightarrow 2l^2 = l^2 + a \\
&\Rightarrow l^2 = a.
\end{aligned}$$

Puisque $l > 0$, alors on a $l = \sqrt{a}$. **(1 Pt).**

Partie 2)

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2-n+\sin(n)}{5n^2+n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2(1-\frac{1}{n}+\frac{\sin(n)}{n^2})}{n^2(5+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})} = \dfrac{1}{5}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin(n)}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0.$ **(1 Pt)**

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{e^{-n}(\pi\alpha)^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{-e}{\pi\alpha}\right)^n = ?$

Remarquons que puisque $\alpha > 1$, alors $\pi\alpha > \pi \Rightarrow \frac{e}{\pi\alpha} < \frac{e}{\pi} \Rightarrow \frac{-e}{\pi\alpha} > \frac{-e}{\pi} > -1.$

Ainsi, $-1 < \frac{-e}{\pi\alpha} < 0$. Ceci implique que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{-e}{\pi\alpha}\right)^n = 0. \quad (\mathbf{1.5Pts})$$

Exercice 2. (5 Pts)

1) On a $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$. On cherche $x, y \in \mathbb{R}$ tels que

$$(x+iy)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2xy = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

En plus, on a

$$|x+iy|^2 = |\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}|^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

Ainsi, nous avons le système suivant

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, & (E1), \quad (\mathbf{0.5Pt}) \\ x^2 - y^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, & (E2) \quad (\mathbf{0.5Pt}) \\ 2xy = \frac{\sqrt{2}}{2}, & (E3). \quad (\mathbf{0.5Pt}) \end{cases}$$

La somme des équations $(E1)$ et $(E2)$ implique que $2x^2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$.

Donc, $x = \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. **(0.5 Pt)**

La différence de $(E1)$ et $(E2)$ implique que $2y^2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow y^2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$. Donc, $y = \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. **(0.5 Pt)**

D'après l'équation $(E3)$, x et y sont de même signe, alors on conclut que les racines carrées de z sont

$$z_1 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad (\mathbf{0.25\,Pt} + \mathbf{0.25\,Pt})$$

2) Le module de z est 1 (déjà calculé) **(0.25 Pt)** et l'argument de z est $\pi/4$. **(0.5 Pt)**

Remarquons que

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Ainsi, $z = e^{i\pi/4}$ **(0.25 Pt)**

3) Les racines carrées de z sont

$$\cos(\frac{\pi}{8}) + i\sin(\frac{\pi}{8}) \;\; et \;\; \cos(\frac{9\pi}{8}) + i\sin(\frac{9\pi}{8})(\mathbf{0.25Pt} + \mathbf{0.25Pt})$$

Comme $\cos(\pi/8) > 0$ **(0.25 Pt)** et $\sin(\pi/8) > 0$, **(0.25 Pt)** alors par identification, on a

$$\cos(\frac{\pi}{8}) + i\sin(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

Ainsi, $\cos(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ **(0.25 Pt + 0.25 Pt)**

Exercice 3. (4 Pts)

1) Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ et $x \notin \mathbb{Q}$. Par l'absurde, supposons que $r + x \in \mathbb{Q}$, alors il existe deux entiers p', q' tels que

$$r + x = \frac{p'}{q'}. \quad \text{Donc,} \quad x = \frac{p'}{q'} - \frac{p}{q} = \frac{p'q - q'p}{qq'} \in \mathbb{Q},$$

ce qui est absurde car $x \notin \mathbb{Q}$. **(1 Pt)**

2) Supposons que $r.x \in \mathbb{Q}$, $(r \neq 0)$. Alors $rx = \frac{p'}{q'} \Rightarrow x = \frac{p'q}{q'p} \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde car $x \notin \mathbb{Q}$. **(1 Pt).**

3) Soient r_1 et r_2 deux rationnels tels que $r_1 < r_2$, alors $r_2 - r_1$ est encore rationnel.

a) Remarquons que $r_2 - r_1 \in \mathbb{Q}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2} \notin \mathbb{Q}$. Donc, d'après la question 2, $\frac{\sqrt{2}}{2}(r_2 - r_1) \notin \mathbb{Q}$. D'autre part, $r_1 \in \mathbb{Q}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}(r_2 - r_1) \notin \mathbb{Q}$, alors d'après la question 1, $r_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(r_2 - r_1) \notin \mathbb{Q}$. **(1 Pt)**

4) Il suffit de remarquer que $x \in]r_1, r_2[$. En effet, on a $x = r_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(r_2 - r_1) > r_1$ et d'autre part, on a

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(r_2 - r_1) < r_2 - r_1$$

$$\Rightarrow x = r_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(r_2 - r_1) < r_2.$$

Ainsi, entre deux rationnels r_1 et r_2, il y a au moins un irrationnel x. **(1 Pt)**