Université de Tlemcen Le 06/12/2018

Faculté des Sciences

Département de mathématiques

Contrôle continu : EDS et Application Durée 1h 15 mn

Exercice 1 : Nous nous proposons de calculer $\int_0^t s\, dB_s$ où $\{B_s\}_{0\leq s\leq T}$ est un mouvement brownien standard.

Tout d'abord en s'inspirant du calcul classique (déterministe) il semble raisonnable de penser qu'un terme de la forme tB_t va apparaitre. Considérons alors la fonction $g(t,x) = tx$ et le processus Y défini par : $Y_t = g(t, B_t) = tB_t$.

1. Par application de la formule d'Itô, établir l'EDS vérifiée par le processus Y.
2. En déduire l'intégrale stochastique $\int_0^t s\, dB_s$.

Exercice 2 : Ecrire les processus suivants comme des processus de Itô en précisant leur drift et le coefficient de diffusion. En déduire dans chaque cas si le processus (X_t) ainsi obtenu est une martingale :

1. $X_t = B_t^2$ en posant $f(x) = x^2$.
2. $X_t = B_t^3 - 3tB_t$ en posant $f(t,x) = x^3 - 3tx$.

Exercice 3 : Nous disposons d'un actif V dont la dynamique stochastique est :

$dV_t = 0.25\, V_t + 0.3\, V_t\, dB_t$ avec $V_0 = 150$.

Où le rendement moyen annuel de l'actif vaut 0.25 et sa volatilité sur un an est 0.3 .

1. En utilisant la fonction $f(t,v) = ln\,(v)$ trouver la loi de la variable transformée : $X_t = \ln V_t$.
2. Calculer la probabilité que le prix de l'actif V soit supérieur à 300 au bout de deux ans.
3. Trouver un intervalle de confiance à 90% pour le prix de l'actif au bout de deux ans.

Barême : chaque question compte pour 1 point ensuite une règle de trois ramène à une note sur 20 points.

Bon courage.

Proposition de solution du contrôle "EDS et applications"

Exercice 1 : 1) $Y_t = g(t, B_t) = tB_t$

$\frac{\partial g}{\partial t} = B_t$; $\frac{\partial g}{\partial x} = t$; $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 0$ alors la formule de Itô donne

1 $dY_t = B_t dt + tB_t + 0$

ou encore $d(tB_t) = B_t dt + t dB_t$

$\Leftrightarrow tB_t = \int_0^t B_s ds + \int_0^t s dB_s$

2) On en déduit l'intégrale stochastique :

1 $\int_0^t s dB_s = tB_t - \int_0^t B_s ds$.

Exercice 2 : 1) $X_t = B_t^2$, en posant $f(x) = x^2$, nous avons :

2 $dX_t = f'(B_t)\, dB_t + \frac{1}{2} f''(B_t)\, dt$ (où $f' = \frac{\partial}{\partial x} f$) car f ne "dépend

1 pas de t directement".

1 Alors $dX_t = 2B_t\, dB_t + dt = dt + 2B_t\, dB_t$

1 où le drift $= 1$, le coefficient de diffusion $= 2B_t$

2) $X_t = B_t^3 - 3tB_t$ en posant $f(t,x) = x^3 - 3tx$

2 $\frac{\partial f}{\partial t} = -3x$; $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3t$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$

1

1. alors $dX_t = \frac{\partial f}{\partial t}(t, B_t)\, dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, B_t) dB_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f(t, B_t) dt$

$= -3B_t\, dt + (3B_t^2 - 3B_t) dB_t + \frac{1}{2}(6B_t)\, dt$

$= (3B_t^2 - 3B_t)\, dB_t$

où le drift $= 0$ et le coefficient de diffusion $= 3B_t^2 - 3B_t$

1) $dX_t = dt + 2B_t\, dB_t$

le drift $\neq 0$ alors $(X_t)_t$ n'est pas une martingale

2) $dX_t = (3B_t^2 - 3B_t)\, dB_t$

le drift $= 0$ alors (X_t) conserve la propriété de martingale héritée de (B_t)

Exercice 3 : $dV_t = 0{,}25 V_t + 0{,}3 V_t dB_t$, $V_0 = 150$

1) $f(t,v) = \ln v$

Par la formule de Itô il vient :

$$f(t,v) = f(0,V_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial v}(u,V_u)\,dV_u + \frac{1}{2}\int_0^t f''(u,V_u)\,\phi_u^2\,du$$

$$= \ln 150 + \int_0^t \frac{1}{V_u}\,dV_u + \frac{1}{2}\int_0^t -\frac{1}{V_u^2}(0{,}3 V_u)^2\,du$$

$$= \ln 150 + \int_0^t \frac{1}{V_u}(0{,}25 V_u du + 0{,}3 V_u dB_u) - \frac{(0{,}3)^2}{2}\int_0^t du$$

$$= \ln 150 + 0{,}25\int_0^t du + 0{,}3\int_0^t dB_u - \frac{(0{,}3)^2}{2}\int_0^t du$$

2 $X_t = \ln V_t = \ln 150 + \int_0^t \left[0{,}25 - \frac{1}{2}(0{,}3)^2\right] du + \int_0^t 0{,}3\,dB_u$

1 ou encore $dX_t = \left(0{,}25 - \frac{(0{,}3)^2}{2}\right)dt + 0{,}3\,dB_t$, $X_0 = \ln 150$

$\Rightarrow X_t = \left[0{,}25 - \frac{(0{,}3)^2}{2}\right]t + 0{,}3 B_t + \ln 150$

1 alors $X_t \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\ln 150 + \left[0{,}25 - \frac{(0{,}3)^2}{2}\right]t\ ;\ (0{,}3)^2 t\right)$

$X_t \hookrightarrow \mathcal{N}(\ ,\ )$

en effet $B_t \hookrightarrow \mathcal{N}(0,t)$

Rq : la variable $S_t = \frac{B_t}{B_0} = e^{X_t}$ est log-normale.

2) On se place à $t = 2$ ans

1 la variable $Z = \left[X_2 - \ln 150 - \left[0{,}25 - \frac{(0{,}3)^2}{2}\right]2\right] / (0{,}3)^2 \cdot 2$

est normale centrée et réduite. On a alors

1 $$P(V_2 > 300) = P(X_2 > \ln 300) = P\left(Z \geq \frac{\ln 300 - \ln 150 - \left[0{,}25 - \frac{(0{,}3)^2}{2}\right]2}{(0{,}3)^2 \cdot 2}\right)$$

1 $= P(Z \geq \alpha)$ que l'on peut lire sur la table de la loi normale en utilisant la f.d.r.

$P(Z \geq \alpha) = 1 - F_Z(\alpha)$

1 3) Intervalle de confiance à 90 %

$P(\alpha \leq V_2 \leq \beta) = 0,90$

$P(\ln\alpha \leq X_2 \leq \ln\beta) = 0,90$

$0,90 = P\left(\frac{\ln\alpha - \mu_{X_2}}{\sigma_{X_2}} \leq \frac{X_2 - \mu_{X_2}}{\sigma_{X_2}} \leq \frac{\ln\beta - \mu_{X_2}}{\sigma_{X_2}}\right)$

$0,90 = P\left(\frac{\ln\alpha - \mu_{X_2}}{\sigma_{X_2}} \leq Z \leq \frac{\ln\beta - \mu_{X_2}}{\sigma_{X_2}}\right)$

$0,90 = P(-z \leq Z \leq z)$ à cause de la symétrie de la loi $\mathcal{N}(0,1)$

$0,90 = F_Z(z) - F_Z(-z) = F_Z(z) - (1 - F_Z(z))$

$= 2F_Z(z) - 1$

1 Alors $F_Z(z) = \frac{0,90+1}{2} = 0,95$ et on en déduit (table) $z = 1,65$

1 $\begin{cases} \frac{\ln\beta - \mu_{X_2}}{\sigma_{X_2}} = 1,65 \Rightarrow \ln\beta = 1,65\,\sigma_{X_2} + \mu_{X_2} = \ldots \Rightarrow \beta = \\ \frac{\ln\alpha - \mu_{X_2}}{\sigma_{X_2}} = -1,65 \Rightarrow \ln\alpha = -1,65\,\sigma_{X_2} + \mu_{X_2} = \ldots \Rightarrow \alpha = \end{cases}$

Et on obtient l'I.C. $[\alpha, \beta]$ à 90% que le prix de l'actif V_2 est dans cet I.C.