Université deTlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Master EDP &t Applications — $A.U.$2018/2019
Espaces fonctionnels et distributions — 04 /02/ 2019

Examen final
Durée:2h

Exercice1 (06pts)

1. Soit H la fonction de Heaviside et $\varphi \in D(\mathbb{R})$.Montrer que le produit de convolution $H * \varphi$ est bien défini.Et donner sa valeur.Quelle relation a t -il avec la primitive de φ.
2. Vérifier que pour $T \in \mathcal{E}^{'}(\mathbb{R})$, $H * T$ est une primitive de T.

Exercice2(09pts)
Soit H la fonction de Heaviside. On considère la fonction sur $\mathbb{R}^2$donnée par :

$$\forall (x;t) \in \mathbb{R}^2; E(x;t) = \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

1. Justifier que l'on peut associer à la fonction E une distribution sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que, pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)$$
3. Soient $\varepsilon > 0$ et $\varphi \in D(\mathbb{R}^2)$. On pose :
$$I_\varepsilon = -\int_{\mathbb{R}} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,t)\, dtdx \quad \text{et} \quad J_\varepsilon = -\int_{\mathbb{R}} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x,t)\, dtdx$$
Calculer $I_\varepsilon + J_\varepsilon$.
4. En effectuant le changement de variable $y = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$ déterminer
$$\lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon + J_\varepsilon.$$
indication : utiliser $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{4}} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
5. Calculer $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) E$ dans $D\prime(\mathbb{R}^2)$.
6. En déduire une solution $T \in D\prime(\mathbb{R}^2)$ de l' equation aux dérivées partielles :
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) T = S; \text{où } S \in \mathcal{E}^{'}(\mathbb{R}^2)$$

Exercice3(05 pts)

1. Soit $T \in \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R})$ .Donner la transformée de Fourier $\mathcal{F}(T\prime)$ en fonction de $F(T)$.

2. Soit $G(x) = e^{-\varepsilon x}H(x)$ où $\varepsilon > 0$. Calculer $G\prime$au sens des distributions et calculer$\mathcal{F}$ (G). En déduire $\mathcal{F}(H)$.

Université deTlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Master EDP &t Applications $A.U.$2018/2019
Espaces fonctionnels et distributions

Corrigé de l'examen final
du 04 /02/ 2019

Exercice1 (06pts)

1. Comme $H \in L^{\infty}(\mathbb{R})$ et que $\varphi \in D(\mathbb{R}) \subset L^{1}(\mathbb{R})$, le produit de convolution $H * \varphi$ est une fonction de classe C$^{\infty}$ et bornée sur $\mathbb{R}$, donnée pour tout x $\in \mathbb{R}$, par :

$$\begin{aligned}(H * \varphi)(x) &= \int_{\mathbb{R}} H(x-y)\varphi(y)dy = \int_{\mathbb{R}} 1_{x \geq y}.\varphi(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)dy\end{aligned}$$

On obtient alors une primitive d'une fonction test en calculant son produit de convolution par la fonction de Heaviside H.

2. pour $T \in \mathcal{E}^{'}(\mathbb{R})$,l'expression $H * T$, a bien un sens: c'est le produit de convolution de la distribution définie par la fonction localement intégrable H pet la distribution à support compact T. On sait que

$$(H * T)' = H' * T = \delta * T = T$$

Exercice2(09pts)
Soit H la fonction de Heaviside. On considère la fonction sur $\mathbb{R}^2$donnée par :

$$\forall (x;t) \in \mathbb{R}^2; E(x;t) = \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

1. E est localement integrable sur $\mathbb{R}^2$,on peut alors associer à E une distribution sur $\mathbb{R}^2$.

2. Pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right) &= \frac{1}{2t\sqrt{4\pi t}}\left(\frac{x^2}{2t}-1\right)e^{-\frac{x^2}{4t}} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right) \end{aligned}$$

3. Soients $\varepsilon > 0$ et $\varphi \in D(\mathbb{R}^2)$. Support de φ est compact dans $\mathbb{R}^2$, il existe alors un rectangle $[-a, a] \times [-b, b]$ le contenant et $supp(\frac{\partial}{\partial t}\varphi) \subset supp(\varphi)$; en opérant une integration par parties, on obtient:

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= -\int_{-a}^{a}\int_{\varepsilon}^{b}\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,t)\,dtdx \\ &= -\int_{-a}^{a}\left[\varphi(x,\varepsilon)\frac{e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} - \int_{\varepsilon}^{b}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\right)\varphi(x,\varepsilon)\,dt\right]dx \end{aligned}$$

En utiluisant $supp(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi) \subset supp(\varphi)$ et par continuité des fonctions E et φ sur$[-a, a] \times [-b, b]$,le théorème de Fubini, permet d'écrire:

$$\begin{aligned} J_\varepsilon &= -\int_{\mathbb{R}}\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x,t)\,dtdx = -\int_{-a}^{a}\int_{\varepsilon}^{b}\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x,t)\,dtdx \\ &= -\int_{\varepsilon}^{b}\int_{-a}^{a}\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x,t)\,dxdt \end{aligned}$$

maintenant en opérant une integration par parties deux fois, on obtient:

$$\int_{\varepsilon}^{b}\int_{-a}^{a}\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x,t)\,dxdt = \int_{\varepsilon}^{b}\int_{-a}^{a}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\right)\varphi(x,t)\,dxdt$$

4. En utilisant l'égalité ,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)$$

on obtient:

$$I_\varepsilon + J_\varepsilon = -\int_{-a}^{a}\varphi(x,\varepsilon)\frac{e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}}dx$$

5. En effectuant le changement de variable $y = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon + J_\varepsilon &= \lim_{\varepsilon \to 0} - \int_{-\frac{a}{\sqrt{\varepsilon}}}^{\frac{a}{\sqrt{\varepsilon}}} \varphi\left(\sqrt{\varepsilon} y, \varepsilon\right) \frac{e^{-\frac{y^2}{4}}}{\sqrt{4\pi}} dy \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(0,0) \frac{e^{-\frac{y^2}{4}}}{2\sqrt{\pi}} dy \end{aligned}$$

utilisant $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{4}} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$,on a alors

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon + J_\varepsilon = \frac{1}{4} \varphi(0,0)$$

6. Pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R}^2)$,

$$\langle \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) E, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon + J_\varepsilon = \langle \frac{1}{4} \delta, \varphi \rangle$$

   Donc F= 4E est une solution élémentaire de l'équation de la chaleur

7. Une solution $T \in D\prime(\mathbb{R}^2)$ de l' equation aux dérivées partielles :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) T = S; \text{où } S \in \mathcal{E}^{'}\left(\mathbb{R}^2\right)$$

   est donnée par

$$T = F * S$$

Exercice3(05 pts)

1. $T \in \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R}) \Longrightarrow T' \in \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R})$.Donc on peut determiner la transformée de Fourier $\mathcal{F}(T\prime)$et

$$\mathcal{F}(T\prime)(\xi) = 2\pi i \xi \mathcal{F}(T)$$

2. $G(x) = e^{-\varepsilon x} H(x)$ où $\varepsilon > 0$. G définit une distribution car c'est une fonction localement inyegrable sur $\mathbb{R}$.

$$\langle [G]^{'}, \varphi \rangle = \varphi(0) - \varepsilon \langle [G], \varphi \rangle$$

   donc $[G]' = \delta - \varepsilon [G]$
   $\underline{[G] \in \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R})}$(car H est tempérée)

$$\mathcal{F}\left([G]'\right) = \mathcal{F}(\delta - \varepsilon [G]) = 1 + -\varepsilon \mathcal{F}([G])$$

   et

$$\mathcal{F}\left([G]'\right) = 2\pi i \xi \mathcal{F}([G])$$

d'où

$$\mathcal{F}([G]) = \frac{1}{2\pi i\xi + \varepsilon}.$$

.Si on fait tendreε vers 0, le théorème de convergence dominée assure que dans $\mathcal{S}^{'}(\mathbb{R})$, la distribution G converge vers H.Par continuité de la transformation de Fourier dans $\mathcal{S}^{'}(\mathbb{R})$

$$\mathcal{F}(H) = \mathcal{F}\left(\lim_{\varepsilon\to 0}[G]\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{F}([G])$$

$\mathcal{F}(H) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i\xi+\varepsilon}$ il suffit de déterminer la limite de $\frac{1}{2\pi i\xi+\varepsilon}$ (au sens de $\mathcal{S}^{'}(\mathbb{R})$).