corrigé de l'E.F

Analyse fonctionnelle 1

08/03/2019

Ex.1: $E = C([0,1];[0,1])$.

$F := \{ f \in E \,/\, (\forall x,y \in [0,1]) \quad |f(x) - f(y)| \leq |x-y| \}$.

1) $f_a \in F$ ssi $\begin{cases} f_a([0,1]) \subset [0,1] \\ f_a \text{ lipschitzienne} \end{cases} \iff \begin{cases} a \in [0,1] \\ |a| \leq 1 \end{cases}$

$f_a \in F \iff a \in [0,1]$

2) Compacité de F ? $\to [0,1]$ est un sp. métrique compact car $(\forall x \quad f(x) \in [0,1])$

. F borné : $(\forall f \in E) \quad \|f\|_\infty \leq 1$

. F uniformément équicontinue :

$(\forall \varepsilon > 0)\, (\exists \eta > 0)\, (\forall x, y \in [0,1]) \quad |x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall f \in F$.

Soit $\varepsilon > 0$, considérons x, y arbitraire $[0,1]$, $f \in F$.

Pour $\eta = \varepsilon$, on a $(\forall x, y \in [0,1])\,(\forall f \in F) \quad |x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Par le Thm d'Ascoli Arzelà (dans E), F est relativement compact dans E. Si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset F$ alors il existe $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que $\{f_{\sigma(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f \in E$.

$\to$ Cette limite $f \in F$ car F est fermé

$\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset F$ tel que $g_n \rightrightarrows g$ alors à la limite on déduit $g \in F$

$(\forall n \in \mathbb{N})\, (\forall x, y \in [0,1]) \quad |g_n(x) - g_n(y)| \leq |x-y|$

$\downarrow n \to +\infty$

$(\forall x, y \in [0,1]) \quad |g(x) - g(y)| \leq |x-y|$.

$\to$ Conclusion : F est un espace métrique compact.

3) Le contre exemple est $f_n(x) = x^n \quad x \in [0,1]$.

la limite simple de f_n est $\begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases} \notin E$

On déduit que E n'est pas un sp métrique compact.

Ex. 2 :

Montrons que n'importe quelle suite de Cauchy dans E est cgte

1) $(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall p,q \geq n_0)\quad \|u_p - u_q\|_\infty < \varepsilon/2$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on déduit que la suite $\{u_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ donc elle cg vers $u(x) \in \mathbb{R}$ (notation). Reste à montrer que u est la limite de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans E.

Soit $\varepsilon>0$, on a

$(\forall p,q \geq n_0)(\forall x \in \mathbb{R})\quad |u_p(x) - u_q(x)| \leq \|u_p - u_q\|_\infty < \varepsilon/2$

En faisant $q \to \infty$, on déduit

$(\forall p \geq n_0)(\forall x \in \mathbb{R})\quad |u_p(x) - u(x)| < \varepsilon/2$

d'où $(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall p \geq n_0)\quad \sup_{x\in\mathbb{R}} |u_p(x) - u(x)| < \varepsilon$

u est la limite de $\{u_n\}$ dans E (u est continue puisque c'est la limite uniforme d'une suite de fcts continues).

On a bien montré que

$\rightarrow \dim E = \infty$, puisque la famille $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre infinie ...

2) Soit $f \in E$, il est clair que Tf est un élément de E.

T est linéaire ? Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f_1, f_2 \in E$, on a $T(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha T f_1 + \beta T f_2$

Soit $f \in E$, $x \in \mathbb{R}$, $\quad |Tf(x)| \leq (8+\sqrt{\pi})\, \|f\|_\infty$

(À ceux qui ont fait l'erreur $|a+b| \leq |a| \underline{\underline{+}} |b|$ et non pas $|a| - |b|$).

d'où $\sup_{x\in\mathbb{R}} |Tf(x)| \leq (8+\sqrt{\pi}).\|f\|_\infty$.

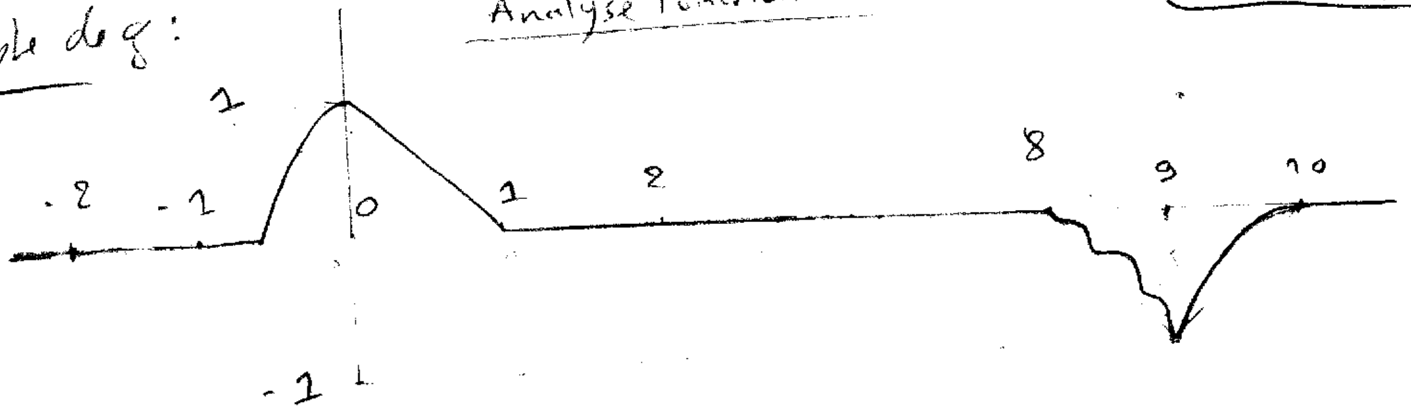
donc $T \in \mathcal{L}(E)$ et $\|T\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 8+\sqrt{\pi}$.

Calcul de $\|T\|_{\mathcal{L}(E)}$

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E)} = \sup_{f\in E\setminus\{0\}} \frac{\|Tf\|_\infty}{\|f\|_\infty} \geq \frac{\|Tg\|_\infty}{\|g\|_\infty}$$

où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction continue à support compacte dont le graphe est :

graphe de g :



On a $\|Tg\|_\infty = 8 + \sqrt{\pi}$.

Finalement, $\|T\|_{\mathcal{L}(C)} = 8 + \sqrt{\pi}$.

3) Si λ est la v.p. dont l'espace propre associé contient les constantes alors elle vérifie $(\forall c \in \mathbb{R})$ $\lambda c = 8c - \sqrt{\pi}\, c$.

d'où : $\lambda = 8 - \sqrt{\pi}$.

Inversement, si on note $f_c(x) = c$ (f_c est constante) $c \neq 0$ on a :

$Tf_c(x) = 8c - \sqrt{\pi}.c = \lambda . f_c$. Ceci prouve que λ est la v.p demandée.

Ex.3 :

1) (A est borné) $\Leftrightarrow$ $(\exists M > 0)(\forall x, y \in A)$ $d(x,y) \leq M$

$\Rightarrow$ $\text{diam}(A) < +\infty$

Inversement, si $\text{diam}(A) < +\infty$ alors pour $x, y \in A$ $d(x,y) \leq \text{diam}(A) < +\infty$

d'où : $(\exists M > 0)(\forall x, y \in A)$ $d(x,y) \leq M$.

Réponse : (A est borné) $\Leftrightarrow$ $\text{diam}(A) < +\infty$.

2) A est borné $\Leftrightarrow$ $(\forall u \in E)(\exists R > 0)$ $A \subset B(u, R)$.

"$\Rightarrow$" Soit $u \in E$, on a : $(\exists M > 0)(\forall x, y \in A)$ $d(x,y) \leq M$.

Pour $v \in A$, on a $d(u,v) \leq d(u,x) + d(x,v)$

x fixé dans A,

Ainsi, $(\forall v \in A)$ $d(u,v) \leq \underbrace{d(u,x)}_{cst} + \text{diam}(A)$

Pour $R = d(u,x) + \text{diam}(A) + 1$, on a bien montré que $A \subset B(u,R)$

"$\Leftarrow$" Soient $x, y \in A$, u fixé dans E. Il existe $R > 0$ $A \subset B(u, R)$.
(R dépend que de u)

$$d(x,y) \leq d(u,x) + d(u,y)$$
$$< 2R$$

Pour $M = 2R > 0$ on a bien montré $(\forall x, y \in A)\ d(x,y) \leq M < +\infty$

3) A compact.

Ils existent $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tel que $d(x_n, y_n) \to diam(A)$.

Puisque A est compact, alors il existe $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \nearrow$ tel que $\{x_{\sigma(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans A, on note α cette limite. $(\alpha \in A)$

De même, la suite $\{y_{\sigma(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous suite $\{y_{\gamma\circ\sigma(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une limite qu'on note β $(\beta \in A)$.

Par la continuité de l'application distance, on déduit,

$$d(x_{\gamma\circ\sigma(n)}, y_{\gamma\circ\sigma(n)}) \longrightarrow d(\alpha, \beta)$$

Autrement $d(x_{\gamma\circ\sigma(n)}, y_{\gamma\circ\sigma(n)}) \longrightarrow diam(A)$.

Par unicité de limite, on conclut $diam(A) = d(\alpha, \beta)$ avec $\alpha, \beta \in A$. $\square$

Y. O. BOUKARABILA