Université de Tlemcen
Département de Mathématiques A.U 2018-2019
07/01/ 2019

CONTRÔLE CONTINU
Espaces Fonctionnels et Distributions

Exercice1(10pts)
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Justifiez votre réponse

1. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $p \in [1, +\infty]$ et q l'exposant conjugué de p alors le dual topologique de $L^p(\Omega)$ est $L^q(\Omega)$ $\boxed{\text{2pts}}$
2. Si $f, g \in L^5(\Omega))$ alprs $f^3 g^2$ est intégrable sur Ω $\boxed{\text{4pts}}$
3. Si $(\varphi_n)_n$est une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ convergeant vers φ une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors $\frac{\varphi_n(x)-\varphi_n(0)}{x}$converge vers$\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}$. $\boxed{\text{4pts}}$

Exercice 2(10pts)

1. Soient $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Montrer que

$$\langle pf(\frac{1}{x^2}), \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int\limits_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon} \right]$$

   définit une distribution sur $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{4pts}}$

2. Montrer que

$$\frac{d}{dx} vp(\frac{1}{x}) = -pf(\frac{1}{x^2}) \text{ et } xpf(\frac{1}{x^2}) = vp(\frac{1}{x})$$

   $\boxed{\text{3pts}}$

3. Soit $T \in D\prime(R)$.Calculer $(xT)\prime$ $\boxed{\text{1,5pt}}$
4. Résoudre l'´equation différentielle :$xT\prime + T = 0$. $\boxed{\text{1,5pt}}$

Université de Tlemcen
Département de Mathématiques A.U 2018-2019

Corrigé du controle continu
Espaces Fonctionnels et Distributions

Exercice1(10pts)

1. L' affirmation 1. est fausse car le dual topologique de $L^\infty(\Omega)$ n'est pas $L^1(\Omega)$. Le dual de L^∞ contient strictement L^1et s'identifie à l'espace des mesures de Radon.

2. L' affirmation 2. est vraie , en effet:
   soient $f, g \in L^5(\Omega)$ donc $\|f\|_{L^5(\Omega)} < \infty$ et $\|g\|_{L^5(\Omega)} < \infty$,montrons que $f^3 g^2$ est intégrable sur Ω,
   Pour p et q conjugués, l'inégalité de Holder permet d'écrire

$$\int_\Omega f^3(x)\, g^2(x)\, dx \leq \left| \int_\Omega |f(x)|^3 |g(x)|^2 dx \right| \overset{Holder}{\leq} \left(\int_\Omega \left(|f(x)|^3\right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega \left(|g(x)|^2\right)^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

   d'où en considérant $p = \frac{5}{3}$ et $q = \frac{5}{2}$, p et q sont conjugués et on obtient

$$\begin{aligned} \int_\Omega f^3(x)\, g^2(x)\, dx &\leq \left(\left(\int_\Omega |f(x)|^5 dx \right)^{\frac{1}{5}} \right)^3 \left(\left(\int_\Omega |g(x)|^5 dx \right)^{\frac{1}{5}} \right)^2 = \|f\|^3_{L^5(\Omega)} \|g\|^2_{L^5(\Omega)} \\ &< \infty \end{aligned}$$

3. L' affirmation 3. est vraie , en effet:
   Soit $(\varphi_n)_n$est une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ convergeant vers $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,
   Les suites convergentes de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ sont les suites dont les supports restent dans un compact fixe de $\mathbb{R}$ et telles que les dérivées convergent toutes uniformément sur ce compact. Pour $x \neq 0$, $\left| \frac{\varphi_n(x)-\varphi_n(0)}{x} - \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} \right| = \left| \frac{\varphi_n(x)-\varphi(x)}{x} - \frac{\varphi_n(0)-\varphi(0)}{x} \right| \leq \left| \frac{\varphi_n(x)-\varphi(x)}{x} \right| + \left| \frac{\varphi_n(0)-\varphi(0)}{x} \right|$
   puisque la convergence uniforme implique la convergence simple, si $x \in K$ (x est borné) et $0 \in K$, on a $\left| \frac{\varphi_n(x)-\varphi(x)}{x} \right| \underset{n\to\infty}{\to} 0$ et $\left| \frac{\varphi_n(0)-\varphi(0)}{x} \right| \underset{n\to\infty}{\to} 0$
   sinon $x \notin K$ ou $0 \notin K$ on a $\left| \frac{\varphi_n(x)-\varphi(x)}{x} \right| = 0$ ou $\left| \frac{\varphi_n(0)-\varphi(0)}{x} \right| = 0$

<u>Exercice 2</u>(10pts)

1.

$$\langle pf(\frac{1}{x^2}), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon} \right]$$

   i) cohérence de la définition
   Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, il existe $a > 0$, $\mathrm{supp}(\varphi) \subset [-a, a]$

$$\begin{aligned} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx &= \int_{|a\geq x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx = \int_\varepsilon^{+a} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx + \int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx \\ &= \int_\varepsilon^{+a} \frac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{x^2} dx \end{aligned}$$

et,

$$-2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}=2\int_{\varepsilon}^{+a}\frac{\varphi(0)}{x^2}dx+2\frac{\varphi(0)}{a}$$

Donc :

$$\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}dx-2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}=\int_{\varepsilon}^{+a}\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2}dx+2\frac{\varphi(0)}{a}$$

La fonction φ est C^∞ à support compact, un développement limité permet de prouver que $\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ est prolongeable par continuité en 0, posons

$$\psi(x):=\begin{cases}\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2} & \text{si x} \neq 0\\ \varphi''(0) & \text{si x} = 0\end{cases}$$

ψ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, donc bornée sur $[\varepsilon,a]$,par suite

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}dx-2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}\right]<\infty$$

$\langle pf(\frac{1}{x^2}),\varphi\rangle$est bien défini.

ii) linéarité découle de celle de l'integrale.

iii) Continuité

$$\begin{aligned}\left|\langle pf(\frac{1}{x^2}),\varphi\rangle\right| &= \left|\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{+a}\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2}dx+2\frac{\varphi(0)}{a}\right|\\ &= \left|\begin{array}{r}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{+1}\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2}dx+\int_{1}^{a}\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2}dx\\ +2\frac{\varphi(0)}{a}\end{array}\right|\\ &\leq M_K\left(\sup_K|\varphi''|+\sup_K|\varphi|\right)\leq M_K\sum_{k\leq 2}\sup_K\left|\varphi^{(k)}\right|\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\langle \frac{d}{dx} vp(\frac{1}{x}), \varphi \rangle &= -\langle \frac{d}{dx} vp(\frac{1}{x}), \varphi' \rangle \\
&= -\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x} dx \right] \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[-\int_{\varepsilon}^{a} \frac{\varphi'(x)}{x} dx - \int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x} dx \right] \\
&\overset{intégrationparpartie}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \left[-\frac{\varphi(x)}{x} |_{\varepsilon}^{a} - \frac{\varphi(x)}{x} |_{-a}^{-\varepsilon} - \int_{a \geq |x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx \right] \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varphi(\varepsilon) + \varphi(-\varepsilon) - 2\varphi(0)}{\varepsilon} - \langle pf(\frac{1}{x^2}), \varphi \rangle \\
&= -\langle pf(\frac{1}{x^2}), \varphi \rangle
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{d}{dx} vp(\frac{1}{x}) = -pf(\frac{1}{x^2})$$

et,

$$\langle xpf(\frac{1}{x^2}), \varphi \rangle = \langle pf(\frac{1}{x^2}), x\varphi \rangle$$

posons $\Phi(x) = x\varphi(x) \Longrightarrow \Phi(0) = 0$

$$\langle xpf(\frac{1}{x^2}), \varphi \rangle = \langle pf(\frac{1}{x^2}), \Phi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\Phi(x)}{x^2} dx - 2\frac{\Phi(0)}{\varepsilon} \right] = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

Donc

$$xpf(\frac{1}{x^2}) = vp(\frac{1}{x})$$

3. Soit $T \in D\prime(R)$ et soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle (xT)', \varphi \rangle = -\langle (xT), \varphi' \rangle = -\langle T, x\varphi' \rangle$$

or

$$x\varphi' = (x\varphi)' - \varphi$$

d'où

$$\begin{aligned}
\langle (xT)', \varphi \rangle &= -\langle T, x\varphi' \rangle = -\langle T, (x\varphi)' - \varphi \rangle \\
&= -\langle T, (x\varphi)' \rangle + \langle T, \varphi \rangle \\
&= \langle T', x\varphi \rangle + \langle T, \varphi \rangle \\
&= \langle xT', \varphi \rangle + \langle T, \varphi \rangle \\
&= \langle xT' + T, \varphi \rangle
\end{aligned}$$

donc

$$(xT)' = xT' + T$$

4.

$$xT\prime + T = 0 \Longleftrightarrow (xT)' = 0$$

si $xT = [cste]$: distibution associée à la fonction cste,qui est une fonction C^1 , on a alors $[cste]' = [cste'] = [0]$ =la distribution nulle, ce qui suggère $T = cste.vp\left(\frac{1}{x}\right)$ comme solution de l'équation differentielle.
