Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire : 2018-2019
Module : Contrôle optimal
Date : 02-10-2019

Niveau : ***Première Année Master Biomathématiques et Modélisation***

EXAMEN FINAL

Exercice 1 (11 points)

Une entreprise produit un bénéfice $x(t) > 0$ au temps t. Une fraction $u(t)x(t)$ de ce bénéfice, avec $0 \leq u(t) \leq 1$, est réinvestie dans la production et contribue à l'augmentation de la richesse crée par l'entreprise et le reste est distribué aux actionnaires.

On suppose que l'évolution du bénéfice est gouverné par le problème initial suivant

$$(1) \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = kx(t)u(t), \text{ pour tout } t \in [0,T], \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

où k est une constante strictement positive donnée, $T > 0$ fixé avec $T > \frac{1}{k}$ et $x_0 > 0$.

La fraction $u(t) \in [0,1]$ réinvestie est considérée comme un contrôle et on considère le problème de contrôle optimal

$$\sup_{u \in L^1([0,T],[0,1])} J(u) \text{ avec } J(u) = \int_0^T (1-u(t))\,x(t)\,dt.$$

1) Résoudre le problème initial (1) pour $u = 0$ et $u = 1$.
2) Ecrire le Hamiltonian pour ce problème.
3) En utilisant le prinicipe de maximum de pontriaguine
i) Ecrire l'équation de l'état adjoint $\lambda^*(t)$.
ii) Ecrire la condition finale $\lambda^*(T)$.
iii) Ecrire le problème de maximisation permettant de calculer le contrôle optimal u^*.
iv) En déduire la valeur du contrôle optimal u^* en fonction de k et λ^*.
Indication : On rappelle que $x^*(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$.
4) Résoudre l'équation différentielle satisfaite par λ^*.
Indication : Remarquer que $k\lambda^*(t) \leq 1$ sur un intervalle de la forme $[t^*, T]$ avec $k\lambda^*(t^*) = 1$ et que, sur cet intervalle l'équation différentielle ordinaire avec la condition finale $\lambda^*(T)$ est trés simple à résoudre. Résoudre ensuite l'équation différentielle ordinaire sur $[0, t^*]$.
5) Conclure que le contrôle optimal est bang-bang avec un seul saut en t^*, avec t^* introduit dans la question précédente.
6) En déduire la trajectoire optimale.

Exercice 2 (09 points)

On considère le problème de contrôle optimal suivant

$$(2) \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = 2x(t) + u(t), \\ x(s) = \xi, \\ J(s,\xi;u) = \frac{1}{2}\int_s^T (x^2(t) + u^2(t))dt, \end{cases}$$

pour tout $s \in [0,T]$, $T > 0$ fixé, et pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

1) Écrire l'équation HJB et la condition finale pour la fonction valeur $V(s;\xi) = \inf\limits_{u\in L^1([0,T],\mathbb{R})} J(s,\xi;u)$.

2)

2.1) En cherchant la solution sous la forme séparée $V(s;\xi) = \mu(s)\,\xi^2$, montrer que μ est solution du problème à valeur finale suivant

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} \mu'(s) + 4\mu(s) - 2\mu^2(s) + \frac{1}{2} = 0, \text{ pour tout } s \in [0,T], \\ \mu(T) = 0. \end{cases}$$

2.2) Vérifier que $2\mu^2(s) - 4\mu(s) - \frac{1}{2} = 2\left(\mu(s) - 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 2\sqrt{5}\left(\mu(s) - 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

2.3) Pour tout $s \in [0,T]$, on définit la fonction f par

$$f(s) = \frac{1}{\mu(s) - 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}}.$$

Vérifier que f est solution du problème à valeur finale suivant

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} f'(s) = -2\left(1 + \sqrt{5}f(s)\right), \text{ pour tout } s \in [0,T], \\ f(T) = -\dfrac{1}{1 + \frac{\sqrt{5}}{2}}. \end{cases}$$

2.4) Déterminer la solution de (4).

2.5) En déduire la solution de (3).

3) En déduire le contrôle optimal comme feedback.

Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen.
Faculté des Sciences.
Département de Mathématiques.
Niveau : 1ère année Master Biomathématiques et Modélisation.

A. U. : 2018-2019
Module : Contrôle optimal.

Corrigé de l'examen final
du mercredi 02 octobre 2019.

Exercice 1

1°)

1.1°) Pour $u=0$, on a le problème initial suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=0, & t\in[0,T], \\ x(0)=x_0. \end{cases} \qquad (1.1)$$

La solution de (1.1) est $x(t)=x_0$, pour tout $t\in[0,T]$.

1.2°) Pour $u=1$, on a le problème initial ~~suivant~~ suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=k\,x(t), & t\in[0,T], \\ x(0)=x_0. \end{cases} \qquad (1.2)$$

La solution de (1.2) est $x(t)=x_0 e^{kt}$, pour tout $t\in[0,T]$.

2°) Le Hamiltonian H est défini par

$$H : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(t, x, \lambda, u) \longmapsto H(t, x, \lambda, u),$$

avec

$$H(t,x,\lambda,u) = \lambda k x u + (1-u)x.$$

3°)

i) L'équation de l'état adjoint λ^*.

Pour tout $t \in [0,T]$, on a

$$\dot{\lambda}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x^*, \lambda^*, u^*)$$

$$= -\lambda^*(t) k u^*(t) + u^*(t) - 1$$

$$= \boxed{(1 - \lambda^*(t) k) u^*(t) - 1.}$$

ii) La condition finale $\boxed{\lambda^*(T) = 0.}$

iii) On a,

$$H(t, x^*, \lambda^*, u^*) = \max_{v \in [0,1]} H(t, x^*, \lambda^*, v).$$

iv) En déduire la valeur du contrôle optimal en fonction de k et λ^*.

On a,

$$H(t, x^*, \lambda^*, u^*) = \lambda^* k x^* u^* + (1-u^*)x^*$$
$$= (\lambda^* k - 1) x^* u^* + x^*.$$

D'autre part, on a :

$$H(t, x^*, \lambda^*, u^*) = \max_{v\in[0,1]} \left[(\lambda^* k - 1) x^* v + x^*\right]$$
$$= \max_{v\in[0,1]} \left[(\lambda^* k - 1) x^* v\right] + x^*$$
$$= x^* \max_{v\in[0,1]} \left[(\lambda^* k - 1) v\right] + x^* \quad \begin{pmatrix}\text{car} \\ x^*>0\end{pmatrix}.$$

Alors,

$$(\lambda^* k - 1) u^* = \max_{v\in[0,1]} \left[(\lambda^* k - 1) v\right].$$

Ce qui donne

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda^* k - 1 < 0, \\ \in [0,1] & \text{si } \lambda^* k - 1 = 0, \\ 1 & \text{si } \lambda^* k - 1 > 0. \end{cases}$$

4°) Résolvons l'équation différentielle satisfaite par λ^*.

On a,

$$\begin{cases} \dot{\lambda}^*(t) = \left(1 - \lambda^*(t)k\right)u^*(t) - 1, \; t \in [0,T], \\ \lambda^*(T) = 0. \end{cases} \quad (Adj)$$

Tout d'abord comme $\lambda^*(T) = 0$, alors il existe t^* tq

$\lambda^*(t)k - 1 < 0$, pour tout $t \in]t_*, T]$.

Par suite $u^*(t) = 0$, pour tout $t \in]t_*, T]$ et la solution de (Adj) sur $]t_*, T]$ est $\lambda^*(t) = T - t$.

Maintenant on considère la fonction "Switch" ou de commutation σ définie par

$$\sigma(t) = \lambda^*(t)k - 1.$$

On a,

$$\dot{\sigma}(t) = \dot{\lambda}^*(t)k.$$

Alors,

$$\dot{\sigma}(t)\Big|_{\sigma(t)=0} = \dot{\lambda}^*(t)k\Big|_{\lambda^*(t)k-1=0}$$

$$= -1 < 0.$$

C'st-à-dire l'équation $\lambda^*(t)k-1=0$ admet au plus un solution et si t^* st tq $\lambda^*(t^*)k-1=0$, alors $\lambda^*(t)k-1>0$ pour $t<t^*$ et $\lambda^*(t)k-1<0$ pour $t>t^*$.

Maintenant on sait que

$$\lambda^*(t) = T-t \text{ sur }]t^*, T].$$

Déterminons t^* tq $\lambda^*(t^*)k-1=0$.

On a,

$$k(T-t^*)-1=0.$$

C'st-à-dire,

$$t^* = T - \frac{1}{k}.$$

Alors,

$$\begin{cases} \lambda^*(t)k-1>0, \text{ pour } t\in [0, T-\frac{1}{k}[\\ \lambda^*(t^*)k-1=0, \text{ avec } t^*=T-\frac{1}{k}. \\ \lambda^*(t)k-1<0, \text{ pour } t\in]T-\frac{1}{k}, T]. \end{cases}$$

Déterminons la solution λ^* sur $[0, T-\frac{1}{k}[$.

Comme $\lambda^*(t).k - 1 > 0$, pour tout $t \in [0, T-\frac{1}{k}[$, alors $u^*(t) = 1$, pour tout $t \in [0, T-\frac{1}{k}[$ et d'après (Adj), on a :

$$\dot{\lambda}^*(t) = -\lambda^*(t)\,k$$

Ce qui donne,

$$\lambda^*(t) = C\,e^{kt}, \quad \text{avec } C > 0.$$

Comme,

$$\lambda^*(T-\tfrac{1}{k})\,k = 1.$$

Alors,

$$C\,e^{k(T-\frac{1}{k})}.k = 1.$$

C'est-à-dire,

$$C = \frac{e^{k(\frac{1}{k}-T)}}{k}.$$

Par suite,

$$\lambda^*(t) = \frac{e^{k(t+\frac{1}{k}-T)}}{k}, \text{ pour } t \in [0, T-\tfrac{1}{k}[.$$

En conclusion, on a :

$$\lambda^*(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{k(t+\frac{1}{k}-T)}}{k}, \text{ pour } t \in [0, T-\frac{1}{k}[, \\ T-t, \text{ pour } t \in [T-\frac{1}{k}, T]. \end{cases}$$

5°) D'après la question précédente, il résulte que le contrôle optimal u^* est bang-bang et elle a la forme suivante

$$u^*(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in [0, T-\frac{1}{k}[, \\ 0 \text{ si } t \in [T-\frac{1}{k}, T]. \end{cases}$$

6°) En déduire la trajectoire optimale.

On a,
$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = k\, x^*(t)\, u(t), \text{ pour tout } t \in [0, T], \\ x^*(0) = x_0 \end{cases}$$

On distingue les cas suivants :

<u>1er Cas</u> : $t \in [0, T - \frac{1}{k}[$.

Pour ce cas, on a

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = k\, x^*(t), & t \in [0, T - \frac{1}{k}[, \\ x^*(0) = x_0. \end{cases}$$

La solution x^* est donnée par

$$x^*(t) = x_0\, e^{kt}.$$

<u>2ème Cas</u> : $t \in [T - \frac{1}{k}, T]$.

Pour ce cas, on a

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = 0, & t \in [T - \frac{1}{k}, T] \\ x^*(T - \frac{1}{k}) = x_0\, e^{k(T - \frac{1}{k})}. \end{cases}$$

La solution x^* est donnée par

$$x^*(t) = x_0\, e^{k(T - \frac{1}{k})}.$$

En conclusion la trajectoire optimale x^* est

$$x^*(t) = \begin{cases} x_0\, e^{kt}, & t \in [0, T - \frac{1}{k}[, \\ x_0\, e^{k(T - \frac{1}{k})}, & t \in [T - \frac{1}{k}, T]. \end{cases}$$

Exercice 2 :

1°) Le Hamiltonian H associé au problème (2) est

$$H(t, x, \lambda, u) = \lambda(2x+u) + \frac{1}{2}(x^2+u^2)$$

Déterminons le Hamiltonian minimisé H_{min} défini par

$$H_{min}(t, x, \lambda) = \min_{u \in \mathbb{R}} H(t, x, \lambda, u).$$

On pose

$$F(u) = \lambda(2x+u) + \frac{1}{2}(x^2+u^2).$$

Alors $\quad F'(u) = \lambda + u.$

On a le tableau de variations

u	$-\infty$		$-\lambda$		$+\infty$
$F'(u)$		$-$	0	$+$	
$F(u)$	$+\infty$	$\searrow$	$F(-\lambda)$	$\nearrow$	$+\infty$

D'après le tableau de variations, on a :

$$H_{min}(t, x, \lambda) = F(-\lambda) = +2\lambda x - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{1}{2}x^2.$$

Par suite l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman HJB est donnée par

$$\frac{\partial V}{\partial s}(s,\xi) + H_{min}\left(s,\xi,\ \frac{\partial V}{\partial \xi}(s,\xi)\right) = 0.$$

C'st-à-dire,

$$\frac{\partial V}{\partial s}(s,\xi) + \frac{1}{2}\xi^2 + 2\xi\ \frac{\partial V}{\partial \xi}(s,\xi) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial \xi}(s,\xi)\right)^2 = 0.$$

La condition finale $V(T,\xi)$ st donnée par

$$V(T,\xi) = 0.$$

2°)

2.1°) On pose $V(s,\xi) = \mu(s)\,\xi^2$.

Alors, $\frac{\partial V}{\partial s}(s,\xi) = \mu'(s)\,\xi^2$ et $\frac{\partial V}{\partial \xi}(s,\xi) = 2\mu(s)\xi$.

En remplace dans l'équation HJB et la condition finale, on obtient

$$\begin{cases} \mu'(s)\,\xi^2 + \frac{1}{2}\xi^2 + 4\mu(s)\,\xi^2 - 2\mu^2(s)\,\xi^2 = 0 \\ \mu(T) = 0. \end{cases}$$

C'est-à-dire,

$$\begin{cases} \mu'(s) + \frac{1}{2} + 4\mu(s) - 2\mu^2(s) = 0, \\ \mu(T) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

2.2°)

$$2\mu^2(s) - 4\mu(s) - \frac{1}{2} = 2\left(\mu^2(s) - 2\mu(s) - \frac{1}{4}\right)$$

$$= 2\left(\mu(s) - 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(\mu(s) - 1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$= 2\left(\mu(s) - 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(\mu(s) - 1 - \frac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{5}\right)$$

$$= 2\left(\mu(s) - 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 2\sqrt{5}\left(\mu(s) - 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}\right).$$

<u>Remarque</u> : D'après cette égalité on peut mettre l'équation dans (3) sous la forme

$$\mu'(s) = 2\left(\mu(s) - 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 2\sqrt{5}\left(\mu(s) - 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}\right).$$

2.3°) Pour tout $s \in [0, T]$, on pose

$$f(s) = \frac{1}{\mu(s) - 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}}.$$

On a,

$$f'(s) = \frac{-\mu'(s)}{\mu(s) - 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}}.$$

D'aprè (3) et la qustion (2.2), on a :

$$\begin{cases} \mu'(s) = 2\left(\mu(s) - 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 2\sqrt{5}\left(\mu(s) - 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}\right), & s \in [0,T], \\ \mu(T) = 0. \end{cases}$$

C'st-à-dire,

$$\begin{cases} \dfrac{\mu'(s)}{\left(\mu(s) - 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} = 2 + \dfrac{2\sqrt{5}}{\mu(s) - 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}}, & s \in [0,T], \\ \mu(T) = 0. \end{cases}$$

C'st-à-dire,

$$\begin{cases} -f'(s) = 2 + 2\sqrt{5}\, f(s), \\ f(T) = -\dfrac{1}{1 + \frac{\sqrt{5}}{2}} \end{cases}$$

C'st-à-dire,

$$\begin{cases} f'(s) = -2\left(1+\sqrt{5}\, f(s)\right), & s\in[0,T], \\ f(T) = -\dfrac{1}{1+\frac{\sqrt{5}}{2}}. \end{cases} \quad (4).$$

2.4°) Déterminons la solution de (4).

D'après (4), on a

$$\int \frac{df}{1+\sqrt{5}\, f} = -2\int ds.$$

C'st-à-dire,

$$\ln\left|1+\sqrt{5}\, f\right| = -2\sqrt{5}\, s + \alpha, \quad \alpha\in\mathbb{R}.$$

Ce qui donne,

$$1+\sqrt{5}\, f(s) = k\, e^{-2\sqrt{5}\, s}, \quad \text{avec } k\in\mathbb{R}^*.$$

C'st-à-dire,

$$f(s) = \frac{k\, e^{-2\sqrt{5}\, s} - 1}{\sqrt{5}}.$$

Comme

$$f(T) = -\frac{1}{1+\frac{\sqrt{5}}{2}},$$

on obtient

$$\frac{k\,e^{-2\sqrt{5}T}-1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{1+\frac{\sqrt{5}}{2}}$$

Ce qui donne,

$$k = \left(1 - \frac{2\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}\right) e^{2\sqrt{5}T}$$

$$= \frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}\, e^{2\sqrt{5}T}.$$

Par suite,

$$f(s) = \frac{\left(\frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}\right) e^{-2\sqrt{5}(s-T)} - 1}{\sqrt{5}}.$$

2.5°) En déduire la solution de (3).

Comme
$$f(s) = \frac{1}{\mu(s) - 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}}$$

Alors
$$\mu(s) = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{f(s)}$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{\left(\frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}\right) e^{-2\sqrt{5}(s-T)} - 1}$$

$$= \boxed{1 + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}(2+\sqrt{5})\, e^{2\sqrt{5}(s-T)}}{2-\sqrt{5} - (2+\sqrt{5})\, e^{2\sqrt{5}(s-T)}}}$$

3°) En déduire le contrôle optimal comme feedback.

On a,
$$u^*(s,\xi) = -\lambda^*(s)$$
$$= -\frac{\partial V}{\partial \xi}(s,\xi) = -2\mu(s)\,\xi$$
$$= -2\mu(s)\,x^*(s).$$

Alors,
$$\boxed{u^*(t) = -2\mu(t)\,x^*(t).}$$