Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen — **Année Universitaire : 2018-2019**
Faculté des Sciences — **Module : Contrôle optimal**
Département de Mathématiques — **Date : 16-07-2019**

Niveau : ***Première Année Master Biomathématiques et Modélisation***

CONTRÔLE CONTINU

Exercice 1 (8 points)

On considère un modèle trés simplifié du mécanisme régissant le niveau de glucose dans le sang. On désigne par $x(t)$ la quantité de glucose au temps t à partir de l'instant initial $t_0 = 0$ ($x(t)$ sera l'état du système). On suppose que si on ne fait rien, elle diminuera à un taux proportionnel à la quantité ($\dot{x} = -\alpha x$). Dans le but de maintenir le niveau de glucose à un niveau acceptable, du glucose est transfusé dans le sang avec une vitesse de transfusion $u(t)$ (cette vitesse $u(t)$ sera le contrôle du problème).

L'évolution de l'état x se fait donc suivant l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t) + u(t); t \geq 0 \tag{1}$$

avec $\alpha > 0$ une constante donnée. On considère aussi la donnée initiale

$$x(0) = a, \tag{2}$$

avec $a > 0$ donnée représentant la quantité de glucose au moment initial. On se propose d'amener, à un moment $T > 0$ **donné**, la quantité de glucose proche d'un point b donné avec $b > 0$, mais avec un coût minimal. Nous considérons alors comme modèle trés simple, le problème de contrôle suivant :

$$\begin{cases} \min \left(\int_0^T u^2(t)\, dt + \beta \left(x(T) - b \right)^2 \right), \\ \dot{x}(t) = -\alpha x(t) + u(t), \\ x(0) = a, \end{cases} \tag{3}$$

avec $\beta > 0$.

Nous admettons qu'on a l'existence et l'unicité d'une solution optimale $(x^*; u^*)$ de (3).

1) En utilisant le prinicipe de minimum de pontriaguine

i) Ecrire l'équation de l'état adjoint $\lambda^*(t)$.

ii) Vérifier que $\lambda^*(T) = 2\beta \left(x^*(T) - b \right)$.

iii) Ecrire les autres conditions d'optimalité.

2) Résoudre ce système d'optimalité et trouver le contrôle optimal $u^*(t)$.

Exercice 2 (12 points)

On considère un véhicule dont la position $x(t) \in \mathbb{R}$ est déterminée par le problème initial suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -ax(t) + u(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

où $a > 0$ est une constante, u est le contrôle avec $|u(t)| \leq 1$ et x_0 un nombre réel.

Pour $T > 0$ fixé on veut atteindre l'état $x(T) = 0$ en minimisant

$$J(u) = \int_0^T |u(t)|\, dt.$$

1) Déterminez l'équation adjointe de ce problème de contrôle.

2) Déterminez les solutions de l'équation adjointe de ce problème de contrôle.

3) Etudier les variations des solutions de l'équation adjointe de ce problème de contrôle. A l'aide du principe du minimum de Pontriaguine montrez que le contrôle optimal u^* est nécessairement de l'une des formes suivantes :

$$u^*(t) = -1 \text{ pour tout } t \in [0,T],$$

ou

$$u^*(t) = 1 \text{ pour tout } t \in [0,T],$$

ou

$$u^*(t) = 0 \text{ pour tout } t \in [0,T],$$

ou

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour tout } t \in [0,t_1[, \\ -1 \text{ pour tout } t \in [t_1,T], \end{cases}$$

ou

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour tout } t \in [0,t_2[, \\ 1 \text{ pour tout } t \in [t_2,T]. \end{cases}$$

Indication : Pour déterminer les contrôles possibles, on tracera d'abord le graphe de la fonction f définie par

$$\begin{array}{llll} f: & [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ & v & \mapsto & f(v) = \lambda^*.v + |v|, \end{array}$$

pour les cas $\lambda^* < -1$, $-1 < \lambda^* < 1$ et $\lambda^* > 1$ puis on discutera suivant les valeurs possibles de l'état adjoint.

4) On suppose$|x_0| \leq \frac{1}{a}\left(e^{aT} - 1\right)$. Déterminez la solution optimale en distinguant les cas $x_0 > 0$ et $x_0 < 0$.

Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques.

A.U. : 2018-2019
Module: Contrôle optimal

Niveau : 1ère année Master Biomathématiques et Modélisation.

Corrigé du contrôle continu du Mardi 16 juillet 2019.

Exercice 1.

On considère le Hamiltonian H définie par

$$H(x,u,\lambda) = \lambda(-\alpha x + u) + u^2.$$

i) L'équation de l'état adjoint λ^*.

D'après le principe du minimum de Pontriaguine, on a

$$\dot{\lambda}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*, u^*, \lambda^*)$$

$$= \boxed{\alpha \cdot \lambda^*(t)}$$

ii) On a,

$$\lambda^*(T) = \Psi'(x^*(T)) \text{ avec } \Psi(x) = \beta\cdot(x-b)^2$$

$$= \boxed{2\beta(x^*(T)-b).}$$

iii) Les autres conditions d'optimalité sont

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial u}(x^*, u^*, \lambda^*) = 0 \\ \dot{x}^*(t) = -\alpha x^*(t) + u^*(t) \\ x^*(0) = a. \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} \lambda^*(t) + 2 u^*(t) = 0 \\ \dot{x}^*(t) = -\alpha x^*(t) + u^*(t) \\ x^*(0) = a. \end{cases}$$

C'est-à-dire,

$$\begin{cases} u^*(t) = -\dfrac{\lambda^*(t)}{2} \\ \dot{x}^*(t) = -\alpha x^*(t) + u^*(t) \\ x^*(0) = a. \end{cases} \qquad (1.1)$$

2°) La résolution du système d'optimalité et la détermination du contrôle optimal.

D'après les questions i) et ii), on a :

$$\lambda^*(t) = 2\beta(x^*(T) - b)\, e^{\alpha(t-T)} \qquad (1.2)$$

Par suite d'après (1.1) et (1.2), on a

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = -\alpha\, x^*(t) - \beta\,(x^*(T)-b)\, e^{\alpha(t-T)} \\ x^*(0) = a. \end{cases}$$

Ce qui donne,

$$x^*(t) = a\,e^{-\alpha t} - \beta\,(x^*(T)-b)\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\, e^{\alpha(s-T)}\, ds$$

$$= a\,e^{-\alpha t} - \beta\,(x^*(T)-b)\, e^{-\alpha(t+T)}\int_0^t e^{2\alpha s}\, ds$$

$$= a\,e^{-\alpha t} - \beta\,(x^*(T)-b)\, e^{-\alpha(t+T)}\left(\frac{e^{2\alpha t}-1}{2\alpha}\right)$$

$$= a\,e^{-\alpha t} - \frac{\beta\,(x^*(T)-b)\,e^{-\alpha T}}{\alpha}\, \mathrm{Sh}(\alpha t). \quad (1.3)$$

Maintenant si on pose $t = T$, on obtient

$$x^*(T) - b = a\,e^{-\alpha T} - \frac{\beta\,(x^*(T)-b)\,e^{-\alpha T}}{\alpha}\, \mathrm{Sh}(\alpha T) - b$$

C'est-à-dire,

$$\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\cdot e^{-\alpha T}\right)\cdot\left(x^*(T)-b\right) = a\,e^{-\alpha T} - b$$

$\mathrm{Sh}(\alpha T)$

Ce qui donne,

$$x^*(T) - b = \frac{\alpha\left(a e^{-\alpha T} - b\right)}{\alpha + \beta e^{-\alpha T}\, Sh(\alpha T)}$$

Par suite d'après (1.3), on a :

$$\boxed{x^*(t) = a e^{-\alpha t} - \frac{\beta\left(a e^{-\alpha T} - b\right) e^{-\alpha T}}{\alpha + \beta e^{-\alpha T}\, Sh(\alpha T)}\, Sh(\alpha t)}$$

Comme

$$\lambda^*(t) = 2\beta\left(x^*(T) - b\right) e^{\alpha(t-T)},$$

et

$$u^*(t) = -\frac{\lambda^*(t)}{2} = -\beta\left(x^*(T) - b\right) e^{\alpha(t-T)},$$

on obtient

$$\boxed{\lambda^*(t) = 2\beta\alpha\left(\frac{a e^{-\alpha T} - b}{\alpha + \beta e^{-\alpha T}\, Sh(\alpha T)}\right) e^{\alpha(t-T)},}$$

et

$$\boxed{u^*(t) = -\beta\alpha\left(\frac{a e^{-\alpha T} - b}{\alpha + \beta e^{-\alpha T}\, Sh(\alpha T)}\right) e^{\alpha(t-T)}.}$$

Exercice 2.

On considère le Hamiltonian H définie par

$$H(x, u, \lambda) = \lambda.(-ax+u) + |u|.$$

1°) L'équation adjointe du problème de contrôle.

Si u^* est le contrôle optimal et x^* est la trajectoire optimale associée, alors d'après le principe du minimum de Pontriaguine, il existe une application

$\lambda^* : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie

$$\dot{\lambda}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*, u^*, \lambda^*)$$

$$= \boxed{a.\lambda^*(t)}$$

2°) Les solutions de l'équation adjointe.

Comme
$$\dot{\lambda}^*(t) = a\lambda^*(t),$$

alors
$$\lambda^*(t) = C e^{at}, \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

3°) Les variations des solutions de l'équation adjointe.

Comme $\lambda^*(t) = C e^{at}$, alors on distingue les cas suivants:

Premier cas: $C > 0$.

On a le tableau de variations suivant:

t	0		T
$\dot{\lambda}^*$		$+$	
λ^*	C	$\nearrow$	Ce^{aT}

Second cas: $C = 0$.

Pour ce cas $\lambda^*(t) = 0$ pour tout $t \in [0, T]$.

Troisième cas: $C < 0$.

Pour ce cas on a le tableau de variations suivant:

t	0		T
$\dot{\lambda}^*$		$-$	
λ^*	C	$\searrow$	Ce^{aT}

4°) D'après le principe du minimum de Pontriaguine, on a

$$H(x^*, u^*, \lambda^*) = \min_{v\in[-1,1]} H(x^*, v, \lambda^*).$$

C'est-à-dire,

$$\lambda^* . \left(-a\, x^* + u^*\right) + |u^*| = \min_{v\in[-1,1]} \left[\lambda^* . (-a\, x^* + v) + |v|\right].$$

C'est-à-dire,

$$\lambda^* . u^* + |u^*| = \min_{v\in[-1,1]} \left[\lambda^* . v + |v|\right].$$

Comme

$$f(v) \overset{\text{déf}}{=} \lambda^* . v + |v| = \begin{cases} (\lambda^* - 1)v \text{ si } v \in [-1, 0], \\ (\lambda^* + 1)v \text{ si } v \in [0, 1], \end{cases}$$

et

$$\min_{v\in[-1,1]} f(v) = \begin{cases} -1 \text{ si } \lambda^* > 1, \\ 0 \text{ si } -1 < \lambda^* < 1, \\ 1 \text{ si } \lambda^* < -1. \end{cases}$$

Alors,

$$u^*(t) = \begin{cases} -1 \text{ si } \lambda^*(t) > 1, \\ 0 \text{ si } -1 < \lambda^*(t) < 1, \\ 1 \text{ si } \lambda^*(t) < -1. \end{cases}$$

Maintenant comme $\lambda^*(t) = C e^{at}$, alors on distingue les cas suivants:

<u>1^{er} Cas</u> : $C > 1$.

Pour ce cas $\lambda^*(t) > 1$, pour tout $t \in [0,T]$, et par suite $u^*(t) = -1$ pour tout $t \in [0,T]$.

<u>$2^{ème}$ Cas</u> : $C < -1$.

Pour ce cas $\lambda^*(t) < -1$, pour tout $t \in [0,T]$, et par suite $u^*(t) = 1$ pour tout $t \in [0,T]$.

<u>$3^{ème}$ Cas</u> : $-1 < C e^{aT} < 1$.

Pour ce cas $-1 < \lambda^*(t) < 1$, pour tout $t \in [0,T]$, et par suite $u^*(t) = 0$, pour tout $t \in [0,T]$.

<u>$4^{ème}$ Cas</u> : $C < 1 < C e^{aT}$

Pour ce cas, il existe un unique $t_1 \in]0,T[$ tq $0 < \lambda^*(t) < 1$, pour tout $t \in [0, t_1[$, $\lambda^*(t_1) = 1$ et $\lambda^*(t) > 1$, pour tout $t \in]t_1, T]$.

Alors,
$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, t_1[, \\ -1 & \text{si } t \in [t_1, T]. \end{cases}$$

<u>$5^{\text{ème}}$ cas</u> : $\quad C e^{aT} < -1 < C.$

Pour ce cas, il existe un unique $t_2 \in]0, T[$ tq

$-1 < \lambda^*(t) < 0$, pour tout $t \in [0, t_2[$, $\lambda^*(t_2) = -1$

et $\lambda^*(t) < -1$, pour tout $t \in]t_2, T]$.

Alors

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour tout } t \in [0, t_2[, \\ 1 \text{ pour tout } t \in [t_2, T]. \end{cases}$$

5°) Supposons que $|x_0| \leq \frac{1}{a}(e^{aT} - 1)$. Déterminons la solution optimale en distinguant les cas $x_0 > 0$ et $x_0 < 0$.

On distingue les cas suivants:

<u>1^{er} Cas</u> : $\quad u^* = -1.$

Déterminons x^* solution du problème suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}^* = -a x^* - 1 \\ x^*(0) = x_0 , \quad x^*(T) = 0. \end{cases}$$

On a,

$$x^*(t) = x_0 e^{-at} - \int_0^t e^{-a(t-s)} ds$$

$$= x_0 e^{-at} - e^{-at} \int_0^t e^{as} ds$$

$$= x_0 e^{-at} - e^{-at} \left(\frac{e^{at} - 1}{a} \right).$$

Pour avoir $x^*(T)$, il faut choisir

$$x_0 = \frac{e^{aT} - 1}{a} > 0.$$

Pour ce cas, on a :

$$x^*(t) = \left(\frac{e^{aT} - 1}{a} \right) e^{-at} - e^{-at} \left(\frac{e^{at} - 1}{a} \right)$$

$$= \frac{e^{a(T-t)} - 1}{a}.$$

2ème Cas : Si $u^* = +1$.

Pour ce cas x^* est solution du problème suivant

$$\begin{cases} \dot{x}^* = -a x^* + 1, \\ x^*(0) = x_0, \; x^*(T) = 0. \end{cases}$$

On a,

$$x^*(t) = x_0 e^{-at} + \int_0^t e^{-a(t-s)} ds$$

$$= x_0 e^{-at} + e^{-at} \int_0^t e^{as} ds$$

$$= x_0 e^{-at} + e^{-at} \left(\frac{e^{at} - 1}{a} \right).$$

Pour avoir $x^*(T) = 0$, il faut choisir

$$x_0 = \frac{1 - e^{aT}}{a} < 0,$$

et par suite,

$$x^*(t) = \left(\frac{1 - e^{aT}}{a} \right) e^{-at} + e^{-at} \left(\frac{e^{at} - 1}{a} \right)$$

$$= \frac{1 - e^{a(T-t)}}{a}.$$

3ème Cas : $u^* = 0$.

Pour ce cas x^* est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}^* = -a x^*, \\ x^*(0) = x_0, \quad x^*(T) = 0. \end{cases}$$

Pour ce cas, on a

$$x^*(t) = x_0 e^{-at}.$$

Pour avoir $x^*(T)=0$ il faut choisir $x_0=0$ et par suite $x^*=0$.

<u>4ème cas</u> :

$$\text{Si} \quad u^*(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t\in[0,t_1[, \\ -1 \text{ si } t\in[t_1,T]. \end{cases}$$

Pour ce cas, on a

$$x^*(t) = \begin{cases} x_0 e^{-at} \text{ si } t\in[0,t_1[, \\ x(t_1) e^{-at} - \dfrac{e^{-at}}{a}\left(e^{at} - e^{at_1}\right) \text{ si } t\in[t_1,T]. \end{cases}$$

Comme x^* est continue il faut prendre $x_0 = x(t_1)$.

Maintenant comme $x^*(T)=0$, on doit avoir

$$x(t_1) = \frac{e^{aT} - e^{at_1}}{a} > 0.$$

En conclusion

$$x^*(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{e^{aT} - e^{at_1}}{a}\right) e^{-at} \text{ si } t\in[0,t_1[, \\ \dfrac{e^{a(T-t)} - 1}{a} \text{ si } t\in[t_1,T]. \end{cases}$$

5ème cas : $U^*(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in [0, t_2[, \\ 1 \text{ si } t \in [t_2, T]. \end{cases}$

Pour ce cas, on a

$$x^*(t) = \begin{cases} x_0 e^{-at} & \text{si } t \in [0, t_2[, \\ x(t_2) e^{-at} + \dfrac{e^{-at}}{a}(e^{at} - e^{at_2}) & \text{si } t \in [t_2, T]. \end{cases}$$

Comme x^* est continue il faut prendre $x_0 = x(t_2)$ et comme $x^*(T) = 0$, il faut choisir $x(t_2) = \dfrac{e^{at_2} - e^{aT}}{a} < 0$.

En conclusion

$$x^*(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{e^{at_2} - e^{aT}}{a}\right) e^{-at} & \text{si } t \in [0, t_2[, \\ \dfrac{1 - e^{a(T-t)}}{a} & \text{si } t \in [t_2, T]. \end{cases}$$