Département de Mathématiques
Université de Tlemcen

Module: Systèmes Dynamiques

Examen (Février 2019, durée 1h30').

Exercice1:(14 pts)
Soit le système

$$(1)\left\{\begin{array}{c} x' = y - x\left(x^2 + y^2 - 2x - 3\right) \\ y' = -x - y\left(x^2 + y^2 - 2x - 3\right) \end{array}\right.$$

a) Ecrire le système en coordonées polaires et montrer que

$$r' = rf\left(r, \theta\right)$$

où f est une fonction à déterminer.

b)Montrer que $(0, 0)$ est le seul pont d'équilibre du système (1).
c) calculer

$$\max_{\theta} f\left(r, \theta\right) \text{ et } \min_{\theta} f\left(r, \theta\right).$$

d) Monter que $r' < 0$ pour r assez grand et $r' > 0$ pour r assez petit.
e) En déduire que (1) admet une solution périodique.

Exercice 2.(06 pts)
a) Trouver une solution du système

$$(2)\left\{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & h(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right.$$

avec $h(t)$=$(\cos t - \sin t)$.
b)Montrer que la solution s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \Phi(t)\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$$

où $\Phi(t) \in M_2(R)$ une matrice carré d'ordre deux.
c) En déduire une matrice fondamentale du système.
d)Determiner une matrice de Monodromie.

Barème détaillé

(04pts)

a) On a $\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \theta = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} \end{cases}$

d'où et $\begin{cases} \dot{r} = r(3 + 2r\cos\theta - r^2) \\ \theta' = -1 \end{cases}$

ainsi $f(r,\theta) = 3 + 2r\cos\theta - r^2$

(02pts)

b) $\dot{x} = \dot{y} = 0$ implique que $\begin{cases} x(x^2+y^2-2x-3) = y \\ -y(x^2+y^2-2x-3) = \cancel{x} \end{cases}$

Ceci donne $x^2+y^2 = x(-y)(x^2+y^2-2x-3) + y(x)(x^2+y^2-2x-3)$

$= 0 \Longrightarrow x = y = 0$

autrement dit $(0,0)$ est le seul point d'équilibre.

(02pts)

c) $\max\limits_{\theta} f(r,\theta) = f(r,0) = 3 + 2r - r^2$
$= (3-r)(1+r)$

$\min\limits_{\theta} f(r,\theta) = f(r,\pi) = 3 - 2r - r^2$
$= (3+r)(1-r)$

d) $\dot{r} = r\, f(r,\theta) < r \max\limits_{\theta} f(r,\theta)$ car $r > 0$

Ce qui implique que $\dot{r} < r(3-r)(1+r)$

et $\dot{r} < 0$ si $r > 3$

(02pts)

de même $\dot{r} = r\, f(r,\theta) > r \min_{\theta} f(r,\theta)$

$= r(3+r)(1-r) > 0$

si $0 < r < 1$

d) Considérons le domaine (04 pts)

$$D = \left\{ (r,\theta) : \quad 1 < r < 3 , \quad \theta \in [0, 2\pi[\right\}$$

D est positivement invariant et ne contient aucun point d'équilibre. D'après le th. de Poincaré - Bendixon, le système admet une solution périodique dans D.

Exercice 2. on remarque que $\dot{y} = h(t)\, y$ (02 pts)

d'où $y(t) = (2 + \sin t + \cos t)\dfrac{y_0}{3}$

Comme $\dot{x} = x + y$, il vient alors que

(02 pts) $x(t) = e^{t} x_0 + e^{t} y_0 + e^{t}\int_0^t (2 + \sin\tau + \cos\tau)\dfrac{e^{-\tau}}{3}\, d\tau$

Ainsi $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \phi(t) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ avec

(01 pt) $\phi(t) = \begin{pmatrix} e^{t} & e^{t}\int_0^t \dfrac{(2+\sin\tau+\cos\tau)}{3} e^{-\tau}\, d\tau \\ 0 & \dfrac{2 + \sin t + \cos t}{3} \end{pmatrix}$

c) La matrice de Monodromie est

(1 pt) $M = \phi(2\pi) = \begin{pmatrix} e^{2\pi} & e^{2\pi}\int_0^{2\pi} \dfrac{(2+\sin\tau+\cos\tau)}{3} e^{-\tau}\, d\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$