Université de Tlemcen
Département de Mathématiques
Master Biomathématiques

Contrôle continu du premier semestre (2018-2019)
Durée 2 h

Exercice1. Soit

$$x'(t) = \mu x(1-x),\ \mu \in R, \text{ un paramètre.} \tag{E}$$

a) résoudre (E) avec $x(0) = x_0 \geq 0$.
b)Calculer $\lim_{t\to+\infty} x(t)$

c) Démontrer b) en utilisant la stabilité des points d'équilibres.

Exercice2. Soit le système

$$\begin{cases} x'(t) = A - x - xy, & A \in R^+ \\ y'(t) = -y + xy \end{cases}$$

Montrer que si $x(0) + y(0) = A$, alors $x(t) + y(t) = A$, $\forall t \geq 0$.

Exercice 3. Soit le système

$$\begin{cases} x'(t) = x(-1+y) \\ y'(t) = y(4-x-2y) \end{cases}$$

a) Donner la variable qui décrit le prédateur.
b) Déterminer les points d'équilibre
c)Donner le portrait de phase.

Département de Mathématiques

Module : Systèmes Dynamiques

AU : 2018-2019

Corrigé du Contrôle Continu

(07pts) **Exercice 1.** a) On applique la méthode de séparation de variables. On aura

$$\frac{dx}{x(1-x)} = \mu\, dt$$ (1pt)

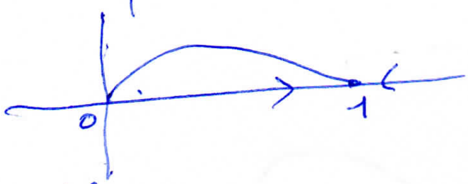
Comme $\frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$, alors une intégration (1pt)

donne que $\log \frac{x}{x_0} - \log \frac{|1-x|}{|1-x_0|} = \mu t$ (1pt)

ainsi $x(t) = \dfrac{x_0}{x_0 + (1-x_0)e^{-\mu t}}$ (01 pt)

b) si $x_0 > 0$ on a $\lim_{t \to +\infty} x(t) = 1$ (01 pt)

c) les points d'équilibre sont $x^* = 0$ et $x^* = 1$ (02 pts)



ainsi 1 est stable.

Exercice 2. (04 pts)

on pose $G(x,y) = x + y - A$

on a $\frac{d}{dt} G(x(t), y(t)) \Big|_{G=0} = \dot{x} + \dot{y} = A - (x+y) = 0$

ainsi $\{G = 0\}$ est positivement invariant.

Exercice 3. (09 pts)

(1pt) La variable x est la variable qui décrit le prédateur

(02pts) Les points d'équilibre sont $(0,0)$, $(0,2)$ et $(2,1)$.

Stabilité: Pour cela, on calcule la Jacobienne

(1pt) $$J(x,y) = \begin{pmatrix} -1+y & x \\ -y & 4-4y-x \end{pmatrix}$$

(1pt) $$J(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$ $(0,0)$ est un pt selle instable

(1pt) $$J(0,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$ $(0,2)$ est un pt selle instable

(2pts) $$J(2,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$ un calcul simple montre que $(2,1)$ est un foyer stable

portrait de phase

(1pt)