Université Aboubekr Belkaïd Tlemcen *A.U. 2018/2019*
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Partiel : **Méthodes de Réduction** I,
Master Biomathématiques et Modélisation
6 janvier *2019* [1h30]

EXERCICE I :

Donner un exemple précis d'un problème perturbé qui n'a pas la propriété d'unicité de la solution alors que son problème réduit a cette propriété.

EXERCICE II :

1) Soit le problème de Cauchy scalaire perturbé par un petit paramètre réel $\varepsilon > 0$

$$x' = \varepsilon^2 + x^2,\ x(0) = 0,$$

de solution (unique) $x(t,\varepsilon)$.

1. Théoriquement, quels types d'approximations peut-on donner, sur un intervalle de temps borné, à la solution quand $\varepsilon \to 0$?
2. Donner la première approximation $t \to \xi(t)$ non nulle sur un intervalle de temps borné.
3. Calculer la solution exacte $x(t,\varepsilon)$ et confirmer ce qui précède. Pour $\varepsilon = 1/2$, représenter dans un même repère les graphes de $\xi(.)$ et $x(.,\varepsilon)$.
4. Peut-on avoir une approximation pour des temps infinis? Justifier.
5. Soit $T = 1$ dans l'intervalle positif de la solution du problème réduit. Comment choisir ε pour que ces approximations soient vraies uniformément sur $[0,T]$?

EXERCICE III : On considère le problème à valeurs initiales déformé régulièrement par un petit paramètre réel ε, et où $a,\ \alpha,\ \beta \in$ R,

$$(P_\varepsilon)\ \begin{cases} \dot{x} = -2x + \ln(1+\varepsilon)y + 2, & x(0) = \alpha, \\ \dot{y} = \varepsilon\cos x + ay, & y(0) = \beta. \end{cases}$$

1. Définir, si possible, les problèmes d'approximations $O(\varepsilon)$ et $O(\varepsilon^2)$ sur un intervalle de temps borné, sans les résoudre.
2. Examiner la possibilité d'extension aux temps infinis.
3. Soit $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon))$ la solution de (P_ε). Donner, sans calculs, $\lim\limits_{t\to+\infty,\varepsilon\to 0} (x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon))$.

« Le Coran et le prophète nous ont appris que Dieu est lumière ; les esprits simples comprennent qu'ils verront Dieu comme on voit le soleil, et les savants que la béatitude est accroissement du savoir. » Ibn Rochd

Ainsi, $x(t,\varepsilon) = 0 + 0.\varepsilon + t.\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$, unif^t sur $[0,T]$, (A)
T étant ici arbitraire.

La 1ère approximation non nulle de $x(t,\varepsilon)$ est

$$\zeta(t) = t.\varepsilon^2, \quad t \in [0,T].$$ 1

3) Résolution de l'équation perturbée.

$$\frac{dx}{\varepsilon^2+x^2} = dt \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon}\,\mathrm{Arctg}\,\frac{x}{\varepsilon} = t + C$$

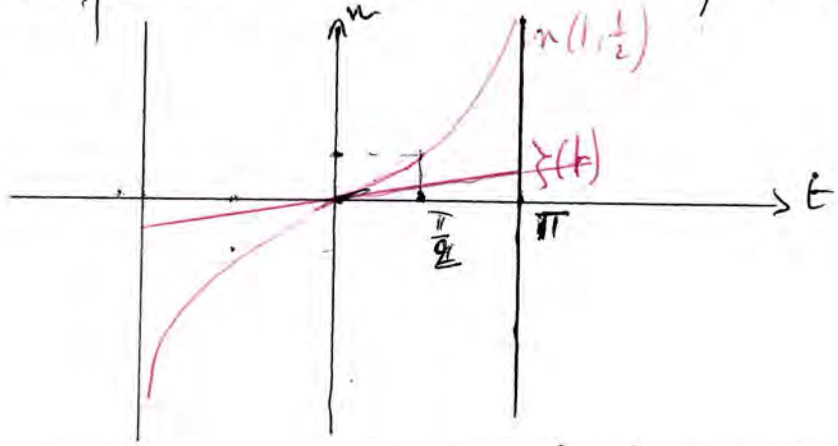
En $t=0$, x vaut 0. D'où $C=0$,

de là : $x(t,\varepsilon) = \varepsilon\,\mathrm{tg}\,\varepsilon t$, $\quad t \in [0, \frac{\pi}{2\varepsilon}[$ 1,5

Le développement de Taylor-Young pour ε voisin de 0 de $x(t,\varepsilon)$ donne alors après calcul

$$x(t,\varepsilon) = 0 + 0.\varepsilon + \frac{1}{2}(t+t)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$$
$$= t\,\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$$

ce qui confirme les calculs de la question (2).



1

[$\underset{\frac{1}{2}\mathrm{tg}\frac{t}{2}}{\underset{\parallel}{x(t,\frac{1}{2})}}$ est définie sur $]\frac{-\pi}{2.\frac{1}{2}}, \frac{+\pi}{2.\frac{1}{2}}[=]-\pi,\pi[$.]

[$\zeta(t) = \frac{t}{4}$]