dUniversité Aboubekr BELKAID – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Troisième Année Licence Mathématiques - Semestre S5
Module : Optimisation sans Contraintes – Examen de Rattrapage
Lundi 29 07 2019 - Durée 01h30mn

Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits

Questions de cours : 5 points

1. Donner l'algorithme du gradient à pas optimal appliqué au problème de minimisation suivant :
$$\min_{x \in R^n} f(x),$$
où, la fonction *f* de R^n dans R est supposée continûment différentiable.
2. Montrer que l'algorithme de Newton appliqué à une fonction *f* quadratique strictement convexe, c'est-à-dire : $f(x) = x^T Ax - b^x x$ où, *A* est une matrice d'ordre *n*, supposée symétrique définie positive et *b* un vecteur de R^n, converge en une seule itération depuis tout point initiale x_0.

Exercice 1 : 7 points

Soit *n* un entier, $n \geq 2.$ On considère *n* points (x_i, y_i) de R^2, pour $i = 1, \ldots, n,$ non tous égaux, et la fonction *f* définie sur R^2, par
$$f(a,b) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2.$$
1. Vérifier que *f* admet un seul point critique (a^*, b^*). sur R^2.
2. Montrer que *f* admet un minimum global sur R^2.

Exercice 2 : 8 points

On considère la fonction *f* de R^n dans R définie par :
$$\forall x \in R^n,\ f(x) = \sin\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right).$$
1. Montrer que la fonction *f* est différentiable sur R^n et calculer son gradient.
2. Montrer que la fonction *f* est C^2 et calculer sa matrice Hessienne.
3. Pour $n=2$, vérifier que le point $(0, 0)^T$ est un point critique de la fonction *f*, puis étudier sa nature.

Bon Courage

Solutionnaire

Questions de cours

1. Algorithme du gradient à pas optimal

Initialisation :$\varepsilon \in R$, $x_0 \in R^n$ *et* $k = 0$ 1

Tant que $\|\nabla f(x_k)\| > \varepsilon$ *faire :* 1.5

$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$ *où* $\alpha_k = arg\ min_{\alpha \geq 0}\ \varphi(\alpha)$ *avec* $\varphi(\alpha) = f\left(x_k - \alpha \nabla f(x_k)\right)$.

k=k+1 0.5

2. L'application de l'algorithme de Newton à la fonction quadratique $f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x$ donne :

$$x_1 = x_0 - \left(\nabla^2 f(x_0)\right)^{-1} \left(\nabla f(x_0)\right) = x_0 - A^{-1}(Ax_0 - b) = A^{-1} b = x^*.$$ 2

Exercice 1

Le point critique (a^*, b^*). de f est solution du système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial a}(a, b) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial b}(a, b) = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} -\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b) x_i = 0 \\ -\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b) = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) b - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) = 0 \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a + nb - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = 0 \end{cases}$$ 2

Posons $\nabla = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$ alors (a^*, b^*). est donné par :

$$\begin{cases} a^* = \dfrac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\nabla} \\ b^* = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\nabla} \end{cases}.$$ 2

Montrons que (a^*, b^*). est un minimum global de *f*.

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{bmatrix} > 0,\ car\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0\ et\ n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\ d'après\ l'inégalité\ de\ Cauchy\ Schwarz\ (n \geq 2,\ x_i\ non\ tous\ égaux)$$

2

Donc la fonction f est strictement convexe ainsi, elle admet un minimum global sur R^2. 1

Exercice 2

Comme la fonction *f* est la composée des fonctions : $x \mapsto \|x\|$ et $x \mapsto \sin(x)$ différentiables sur R^n alors elle est différentiable sur R^n. Son gradient est : 1

$$\Delta f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \cos\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \\ \vdots \\ 2x_n \cos\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \end{pmatrix}.$$ 1

Comme la fonction *f* est la composée des fonctions : $x \mapsto \|x\|$ et $x \mapsto \sin(x)$ de classe C^2 sur R^n alors elle est de classe C^2 sur R^n. Sa matrice Hessienne est : 1

$$\Delta^2 f(x)=\begin{bmatrix} 2\cos\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)-4x_1^2\sin\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) & -4x_1x_2\sin\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) & \cdots & -4x_1x_n\sin\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \\ -4x_2x_1\sin\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) & 2\cos\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)-4x_2^2\sin\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) & \cdots & -4x_2x_n\sin\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -4x_nx_1\sin\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) & -4x_nx_2\sin\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) & \cdots & 2\cos\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)-4x_n^2\sin\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \end{bmatrix}$$ 2

Pour $n=2$, vérifions que le point $(0, 0)^T$ est un point critique de la fonction *f*,

$$\Delta f(0,0)=\begin{bmatrix} 2x_1\cos\left(x_1^2+x_2^2\right) \\ 2x_2\cos\left(x_1^2+x_2^2\right) \end{bmatrix}_{(0,0)}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$ 1

Pour $n=2$, la matrice hessienne de *f* est

$$\begin{bmatrix} 2\cos\left(x_1^2+x_2^2\right)-4x_1^2\sin\left(x_1^2+x_2^2\right) & -4x_1x_2\sin\left(x_1^2+x_2^2\right) \\ -4x_2x_1\sin\left(x_1^2+x_2^2\right) & 2\cos\left(x_1^2+x_2^2\right)-4x_2^2\sin\left(x_1^2+x_2^2\right) \end{bmatrix}.$$

Donc, pour $(x_1=0 \wedge x_2=0)$, la matrice hessienne de *f* est

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$ 1

une matrice définie positive, donc l'origine est un minimum locale strict de *f*. De plus, comme la fonction *f* est strictement convexe sur R^2 ce point est un minimum global strict de *f*. 1