Université de Tlemcen
Département de Mathématiques
L2MAHT (A.U 18/19) **Série N°1**

I. Fonctions réelles de plusieurs variables

Exercice 1 : a/ Déterminer et représenter les domaines d'existence des fonctions suivantes :

1/ $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-x^2}}$,2/ $f(x,y)=Ln(x^2+2y^2-1)(8-2y-x^2-y^2)$, 3/ $f(x,y)=ctg(xy)$

4/$f(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{z}+\sqrt{2-z-y}$, 5/ $f(x,y,z)=arcsin\sqrt{x}+arcsin\sqrt{y}+arcsin\sqrt{z}$,

(supp)6/ $f(x,y,z)=Ln(-xyz)$, 7/ $f(x,y,z)=\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{z}}$ 8/ $f(x,y,z)=\sqrt{1-|x|-|y|-|z|}$.

b/ Représenter les courbes de niveau des fonctions suivantes :

1/ $f(x,y)=x^2y$, 2/ $f(x,y)=x^3$, 3/ $f(x,y)=x^2+9y^2$, 4/ $f(x,y)=\sqrt{36-9x^2-4y^2}$

c/ Déterminer les surfaces de niveau des fonctions suivantes :

1/ $f(x,y,z)=x+y+z$ 2/ $f(x,y)=x^2+y^2+z^2$ 3/ $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$.

Exercice 2 : Calculer les limites suivantes :

1/ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$ 2/ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 3/ $\lim\limits_{x,y\to\infty}\frac{x-y}{x^2+y^2}$ 4/ $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\frac{x}{x-y}$

$\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{xy+yz}{x^2+2y^2+3z^2}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\mathrm{ch}xy}{y^2}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y}{x^4+y^4}$ $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4y}{x^2-y^2}$

$\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{xyz+z^3}{2x^3+yz^2}$

(Supp) 5/ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xysinxy}{sh^2x+sh^2y}$ 6 /$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{ln(1+xy\ )}{x}$/ 7/ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}.\frac{sinx^2+sin2xy+siny^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

8/ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xysinxy}{shx^2+shy^2}$ 9/ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{Arctan^2(sin(x^2+y^2))}{\ln(1+tan(x^2+y^2))}$ 10/ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Exercice 3 : **a)** *Soit* $f:\mathbf{R^2}\to\mathbf{R}$ *définie par* $f(x,y)=\begin{cases}(x+y)^2\ cos\frac{1}{x}cos\frac{1}{y} & si\ xy\neq 0\\ 0 & si\ xy=0\end{cases}$.

Montrer que $\lim\limits_{x\to0}\left(\lim\limits_{y\to0}f(x,y)\right)$ *et* $\lim\limits_{y\to0}\left(\lim\limits_{x\to0}f(x,y)\right)$ n'existent pas, mais $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$.

b) Etudier l'existence des limites ci-dessus pour f : $\mathbf{R^2}\to\mathbf{R}$ **d**éfinie par $\mathrm{f(x,y)}=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} & \mathrm{si}\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \mathrm{si}\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

Exercice 4 : Comment faut-il choisir la fonction g : $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ de sorte que la fonction $f : \boldsymbol{R^2} \to \boldsymbol{R}$

$$définie\ par\ \ f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{y} ln\left(1 - \frac{shy}{\sqrt{x^2+2}}\right) & si\ y \neq 0 \\ g(x) & si\ y = 0 \end{cases}.$$

soit continue aux points (a,0) ?

Exercice 5 : 1/Peut-on prolonger par continuité sur R^2, la fonction définie sur $R^2 - \{(x,x): x \in R\}$

par : $f(x,y) = \frac{sinx - siny}{x-y}$?

2/ (Supp) Même question pour les fonctions définies sur $R^2 - \{(0,0)\}\ par$:

$i)\ f(x,y) = \frac{2x^2+3y^2}{x^2+y^2}$ $\quad ii)\ f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad iii)\ f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ iv) $f(x,y) = \frac{xln(1+x^2)}{y(x^2+y^2)}$

Exercice 6 : (Supp) Etudier la continuité des fonctions $f : \boldsymbol{R^2} \to \boldsymbol{R}$ définies par

$$1/f(x,y) = \begin{cases} xe^{Arctan\frac{y}{x}} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}.\quad 2/f(x,y) = \left\{\begin{matrix} \frac{|x|^{\alpha_1}|y|^{\alpha_2}}{(|x|^{\beta_1}+|y|^{\beta_2})^{\gamma}} & si\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si\ x = y = 0 \end{matrix}\right\}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1\ \beta_2$ et γ sont des constantes positives.

Exercice 7 : (Supp) Calculer les dérivées partielles des fonctions :

1/ $f(x,y) = ysin\sqrt[3]{x}.arctan\frac{y}{x}$. $2/f(x,y) = ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)$ $3/\ f(x,y) = arcsin\left(\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}\right)$

4/ $f(x,y,z) = (xy)^z$ 5/ $f(x,y,z) = \frac{x^2+z}{(x+2y^2)z}$ $\quad 6/f(x,y,z,t) = xyzte^{x+y^2+z^3+t^4}$.

Exercice 8 : (Supp) Soient $u = ln(x^2+y^2+xy),\ v = xy + xe^{\frac{y}{x}},\ w = x + \frac{x-y}{y-z}$

Vérifier que : $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2,\ \ x\frac{\partial v}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial y} = x.y + v,\ \ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 1.$

Exercice 9:$1/f$:$R^2 \to R$ $\quad f\ (x,y) = \left\{\begin{matrix} \frac{xy}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ x = y = 0 \end{matrix}\right\}$..

Montrer que $\nabla\ f\ (0,0)$=(0,0) mais la fonction f n'est pas continue en (0,0).

2/(Supp) Même question avec $i)\ f\ (x,y) = \begin{cases} \frac{x}{y^2} & si\ y \neq 0 \\ 0 & si\ y = 0 \end{cases}$ $ii)\ f\ (x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} & si\ \ y \neq 0 \\ 0\ \ si & y = 0 \end{cases}$

3/ Calculer $\nabla\ f\ (0,0,0)$ telle que :

$$f:R^3 \to R \qquad f\ (x,y,z) = \begin{cases} \frac{cos\left(\sqrt{x^2+y^2}-z^2\right)-1}{y} & si\ \ y \neq 0 \\ 0 & si\ \ y = 0 \end{cases}$$

3/(supp) calculer ∇ f (0,0,0) telle que :

$$\mathrm{f}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad \mathrm{f\,(x,y,z)} = \begin{cases} \frac{\sin\left(\sqrt{x^4+y^4-z^2}\right)}{x} & \mathrm{si}\ \ x \neq 0 \\ 0 & \mathrm{si}\ \ x = 0 \end{cases}$$

Exercice 10 : /i) Calculer $\nabla\ f\ (1{,}0)$ pour $f\ (x,y) = \int_{x}^{x^2+y^2} ln(2+x^2+y^2+t^2)\,dt$.

ii)(Supp) Calculer $\nabla\ f\ (0{,}0)$ pour $f\ (x,y) = \int_{1y}^{x^2+1} ch(xyt^3)+th(5xyt^2)\,dt$

iii) Calculer : $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\int_{-t}^{t} e^{t^2x^2}dx}{sint}$ (supp) $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\int_{t^2}^{t}\ln\left(x^2+cos(x^2t^3)\right)dx}{arcsint^3}$.

Exercice11: Former les équations du plan tangent et de la normale aux surfaces suivantes et aux points indiqués :
1.à la sphère $x^2+y^2+z^2 = 2Rx$ au point $(R, Rsin\alpha, Rcos\alpha)$.
(Supp) 2. au cône $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=\frac{(z-1)^2}{9}$ au point (0,2,4)
(Supp)3. au paraboloïde $4z-1=x^2+2x+y^2$ au point $(1{,}2{,}2)$.
b) Déterminer le plan tangent à la surface paramétrée par les équations :
$x=u^2\ ,y=v^2, z=u+2v$ au point (4,1,4).

Exercice12: /(Supp) Déterminer la fonction $f{:}R_+^* \times R \to R$ sachant que pour tout (x,y)appartenant à son domaine de définition :

$$\left\{\begin{array}{l} f(1,y)=siny \\ f'_x=\dfrac{x^2+y^2}{x} \end{array}\right\}$$

Exercice 13 :1/ Soit $f{:}R^2 \to R$ $f\ (x,y) = \frac{x-2y}{x^2+3y^2+1}$

Montrer que f est différentiable en tout point. Calculer df(2,0) et écrire le développement limité de f à l'ordre un au voisinage de (2,0).

2/(Supp) Même question avec $f\ (x,y) = ln(x^2+y^2+1)$ $donner$ son approximation affine au $\mathrm{pt}(-1{,}1)$.

3/ Vérifier, en utilisant la définition, que les fonctions suivantes sont différentiables aux points indiqués :

i) $\mathrm{f\,(x,y) = x^2+y^2+xy}$ au $\mathrm{pt}(-1{,}0)$ ii) $\mathrm{f\,(x,y,z) = x^2-y^2+z}$ au $\mathrm{pt}(0{,}1{,}0)$

supp: iii) $\mathrm{f\,(x,y) = |y|\ln(1+x)}$ au $\mathrm{pt}(0{,}0)$ iv) $\mathrm{f\,(X) = \ln\left(1+\|X\|_2{}^2\right)}$ au $\mathrm{pt}(0,\dots,0)$

4/ Soit $\mathrm{f}{:}\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\mathrm{f\,(x,y,z) = \frac{xz-2y}{x^2+3y^2+z^2+1}}$.
Montrer que f est différentiable en tout point. Calculer df(0,2,0) et écrire le développement limité de f à l'ordre un au voisinage de (0 ,2,0).

Exercice 14 : Soit $f{:}R^2 \to R$ $f\ (x,y) = \left\{\begin{array}{ll} \frac{|x|y}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ (x,y)\neq(0{,}0) \\ 0 & si\ x=y=0 \end{array}\right\}$.

f est-elle différentiable à l'origine ?

(supp)Même question pour 2) $\mathrm{f\,(x,y)} = \left\{\begin{array}{ll} \frac{y^4}{\sqrt{x^2+y^2}} & \mathrm{si\ (x,y)\neq(0{,}0)} \\ 0 & \mathrm{si\ x=y=0} \end{array}\right.$

Exercice 15: (supp)Soit $\mathrm{f}{:}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\mathrm{f\,(x,y)} = \left\{\begin{array}{ll} \mathrm{g(x,y)} & \mathrm{si\ (x,y)\neq(0{,}0)} \\ 0 & \mathrm{si\ x=y=0} \end{array}\right\}$.

Montrer que :

1) Si $\mathrm{g(x,y)} = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ alors f est de classe $\mathrm{C^1(\mathbb{R}^2)}$.

2) Si $g(x,y) = (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ alors f n'est pas de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$mais différentiable dans $\mathbb{R}^2$.
3) Si $g(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ alors f n'est pas différentiable mais continue et les D.P existent dans $\mathbb{R}^2$.
4) Si $g(x,y) = |x| + |y|$ alors on a ni différentiabilité ni existence des D.P mais continuité dans $\mathbb{R}^2$.
5) Si $g(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ alors on a ni différentiabilité ni existence des D.P ni continuité dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 16: 1/ Calculer les différentielles des fonctions suivantes :

$f(x,y,z) = arctan\frac{yx}{z^2}$, $g(x,y) = yx^y$, $h(x,y) = sh^2x + ch^2y$.

Evaluer: $df(1,1,-1)(0.1; 0,02; -0,01), dg(1,2)(-0.1; 0,03)$, $dh(1,0)(0.04 ; -0,02;)$.

2/Calculer approximativement :$(1,002)^{1/3}. (0,993)^2, \sin 46^\circ.\cos 62^\circ$.

Exercice 17: 1/ Soit $f: R^3 \to R$ et g: $R^2 \to R$ $de\ classe\ C^1$ exprimer en fonction des dérivées partielles de f et g la dérivée de chacune des fonctions F définies par :

1. $F(x) = f(x, x^2+x^3, 1-3x)$ 2. $F(x,y) = g(y, chxy)$
3. $F(x) = f(x, g(x,4x), e^{-x+1})$ 4. $F(x,y) = g(2xy, x^2+y^2)$.

Exercice 18 Vérifier que la fonction $f: R \to R$ $f(x) = \int_0^x g(t)\, sh(x-t)dt$ $\alpha > 0$

$et\ g: R \to R\ continue$,est solution de l'équation différentielle $y''(x) + y(x) = g(x)$ avec $y(0) = y'(0) = 0$. Application : calcul de $\int_0^1 x^2\, sh(1-x)dx$

Exercice 19:(Supp) Soit la fonction f : $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(x^2\sin^2 t + y^2\cos^2 t)\, dt$

Montrer que : $y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \pi$, en déduire $\nabla f(x,y)$.

Exercice 20 **a)** Calculer la dérivée de f au point donné dans la direction indiquée par l'angle θ :

1. $f(x,y) = x^2y^3 - y^4$ $(2,1)$ $\theta = \frac{\pi}{4}$
2. $f(x,y) = ye^{-x}$ $(2,0)$ $\theta = \frac{2\pi}{3}$

b) Calculer le taux de variation maximum de f au point donné et indiquer dans quelle direction il se produit :

1. $f(x,y) = sinxy$ $(1,0)$
2. $f(x,y;z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $(3,6,-2)$

Exercice 21 : (Extrait du contrôle continu15)

Soit la surface (montagne) d'équation: $z = f(x,y) = 600 - x^2 - 4y - y^2$.

1) Montrer que f est de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$.

2) Calculer le gradient de f, en déduire la pente à la surface de la montagne au point $P(10,10,360)$ dans la directions Nord-ouest ; dire si l'on commence par monter ou descendre lorsque l'on se déplace depuis ce point dans cette direction.Dans quelle direction la pente est-elle maximale ? Calculer sa valeur.

3) Ecrire l'équation du plan tangent à la surface de la montagne en ce point.

Exercice 22(supp) (Extrait du cont16)

Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x,y) = -y^2cosx + 2x^2 + \frac{3}{2}y^2 - 3\int_{-x}^{y} Sh(xyt^2)\ dt$

1) Montrer que f est de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$.

2) Calculer $\nabla f(0,1)$ et $D_{\vec{v}}f(0,1)$ où $\vec{v}$ est un vecteur unitaire. Donner la valeur maximale du taux de croissance de f au point $(0,1)$, indiquer la direction suivant laquelle il est obtenu .

3) Calculer approximativement la valeur de $f(x,y)$ au point $(0.007 ,\ 0.997)$.

4) On considère la surface d'équation (S) $z = f(x,y)$, écrire l'équation du plan tangent (P) à la surface (S) au point (0 , 1, $\frac{1}{2}$).

Exercice 23

Vérifier que les expressions suivantes sont des différentielles totales puis déterminer les fonctions correspondantes:

1/ $(\frac{1}{y}+1)dx - \frac{x}{y^2}dy$ 2/ $(2x+y+z)dx + (2y+x+z)dy + (2z+x+y)dz$

(Supp) : 3/ $\left(\frac{1}{y}-\frac{z}{x^2}\right)dx+\left(\frac{1}{z}-\frac{x}{y^2}\right)dy+\left(\frac{1}{x}-\frac{y}{z^2}\right)dz.$ 4/ $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-2\right)dx+(1-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})dy$.
5/$(\cos x+3x^2y)dx+(x^2-y^2)dy$ 6/ $(2xyz-3y^2z+8xy^2+2)dx+(8x^2y-6xyz+x^2z+1)dy+(x^2y-3xy^2+3)dz$

Exercice 24: Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $f(x,y)=\begin{cases} y^2\sin\frac{x}{y} & si\ y\neq 0\\ 0 & si\ y=0\end{cases}$

1/Etudier l'existence et la continuité des dérivées partielles premières de f dans $\mathbb{R}^2$.
2/ Etudier l'existence et la continuité des dérivées partielles premières de f dans $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.
Calculer $f''_{xy}(0,0)$ et $f''_{yx}(0,0)$, que peut-on conclure ?

Exercice 25(supp) Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $f(x,y)=\left\{\begin{matrix} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ x=y=0\end{matrix}\right\}$

1/Calculer $f'_x(x,y)$ et $f'_y(x,y)$ pour $(x,y)\neq(0,0)$.
2/En particulier déterminer $f'_x(0,y)$ lorsque $y\neq 0$ et $f'_y(x,0)$ lorsque $x\neq 0$.
3/Calculer $f'_x(0,0)$ et $f'_y(0,0)$.
4/ Calculer $f''_{xy}(0,0)$ et $f''_{yx}(0,0)$. Les hypothèses de Schwartz sont t- elles satisfaites ?

Exercice 26 : Montrer que l'application $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}-\{(0,0)\}$ $f(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$ admet un prolongement continu à $\mathbb{R}^2$, noté $\tilde{f}$.
1/Etudier l'existence et la continuité des dérivées partielles premières de $\tilde{f}$.
2/ Etudier l'existence et la continuité des dérivées partielles secondes de $\tilde{f}$.

Exercice 27:

1/ Calculer $d^2z(0,1)$ et $d^2u(0,0,0)$ si : $z=e^{x^2y}, u=x^2-3y^2+3z^2+9x+y+4xz+2yz.$
2/ (Supp)Calculer $d^2z(1,2)$ si $z=x^2+y^2+xy-4\ln x+\ln 3y.$
3/ Ecrire le Développement limité (formule de Taylor) à l'ordre 2 au voisinage du point (1,2) de la fonction y^x . Application : calculer approximativement $(0,985)^{2,01}$.
4/(Supp) Ecrire le Développement limité de Maclaurin à l'ordre 3 de $f(x,y)=e^{-x}\cos y$.
5/ (Supp) Soit $f:\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}\to\mathbb{R}$ $f(x,y,z)=Arctan\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$. Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$ et calculer sa matrice Hessienne.

Exercice 28: (Supp) Déterminer l'ensemble les fonctions réelles :

a/de classe C^2 telles que : $f''_{xy}(x,y)=0$ et $f''_{xx}(x,y)=0$ $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
b/ de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ telles que : $-y\frac{\partial f}{\partial x}+x\frac{\partial f}{\partial y}=k\ f(x,y)\ \ k\in\mathbb{R}$

Exercice 29:1.Résoudre l'équation aux dérivées partielles : $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ à l'aide du changement de variables $u=\frac{x+y}{2}$ et $v=\frac{x-y}{2}$ Trouver la solution unique qui vérifie les conditions initiales : $f(x,0)=\sin x$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)=-\cos x$

2. Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes :

i. $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ à l'aide du changement de variables u=x+ay, v=x-ay .
ii. $y\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial y}=0$ (aprés passage en coordonnées polaires).

Exercice 30:

1/Soient f et g de classe C^2 dans R^2 telles que : $f(x,y)=g(r,\theta)$: expression de f en coordonnées polaires
a/Vérifier que $\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}$
b/Trouver deux fonctions de classe C^1 $\sigma:R_+^*\to R$ et $\varphi:\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to R$ telles que la fonction

$f: R_+^* \times R \to R$ définie par $f(x,y) = \sigma\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + \varphi\left(\mathrm{Artan}\frac{y}{x}\right)$ soit harmonique($\Delta f = 0$)

Exercice 31: Laplacien en coordonnées cylindriques

Soient f et g de classe C^2 dans $\mathbb{R}^3$ telles que : $f(x,y,z) = g(r,\theta,z)$: expression de f en coordonnées cylindriques.

a/Vérifier que $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}$

b/ Déterminer les fonctions harmoniques f telles que $f(x,y,z) = h\left(\frac{y}{x}\right)$ puis celles qui ne dépendent que de x^2+y^2

Exercice32:

On considère l'équation aux dérivées partielles : $(1) a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$,où a,b et c sont des constantes réelles avec $ac \neq 0$,

1.Transformer l'équation en effectuant le changement de variables :
$u = x + \alpha y \; et \; v = x + \beta y$.

2.Montrer que si l'équation E :$ar^2 + br + c = 0$ admet deux solutions réelles distinctes alors on peut choisir $\alpha \; et \; \beta$ telle que (1) a la forme $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0$,en déduire toutes les fonctions f qui vérifient (1).

3.Montrer que si l'équation E :$ar^2 + br + c = 0$ admet une racine double réelle alors on peut choisir $\alpha \; et \; \beta$ telle que (1) a la forme $\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0$,en déduire toutes les fonctions f qui vérifient (1).

4.Montrer que si l'équation E :$ar^2 + br + c = 0$ admet des solutions complexes alors on peut choisir $\alpha \; et \; \beta$ telle que (1) a la forme $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0$.

Exercice 33: Trouver les extrema des fonctions suivantes :

1.$f(x,y) = cosxsiny + sin^2 x$, $x \in]0,\pi[\times]-\pi,\pi[$ 2.$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - 2x + y - 1$.

(Supp) 2. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ 3.$f(x,y) = x^2y^2 - 5x^2 - 8xy - 5y^2$.

(Supp) 4.$f(x,y,z) = x^3 + y^3 + \frac{4}{3}z^3 - x^2 + y^2 - 2xz^2$ 5.$f(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + xyz + 9z^2$.

Exercice 34: a) Inscrire dans une boule de rayon R un cylindre de surface totale maximale.

(Supp)b) Déterminer un parallélépipède de surface S donnée de volume maximum.

c) Déterminer la plus grande et plus petite valeurs de la fonction $z = x^3 + y^3 - xy + x + y$

dans le domaine : $x \leq 0$, $x \leq 0$, $x + y \geq -3$.

Exercice 35 : Soit $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *telle que*: $F(x,y) = x^3 - y^2 + 2x^2y$, déterminer :

i) L'ensemble des points au voisinage desquels le T.F.I permet d'expliciter y en fonction de x.

ii) L'ensemble des points au voisinage desquels le T.F.I permet d'expliciter x en fonction de y.

(Supp) Même questions pour les fonctions :

1.$F(x,y) = x^3 + x^2 - y^2$,   2.$F(x,y) = x^2 - y + 3x^2y$.

Exercice 36:1. A partir de la relation : $y^3 - 1 = x^2 - y$, on explicite y =$\varphi(x)$ *au voisinage* du point (-3,2) . Calculer $\varphi(-3)$, $\varphi'(-3)$et $\varphi''(-3)$.

2. (Supp) Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1, telle que : $f(e^e, 1) = 0$, $f'_x(e^e, 1) = 4$ et $f'_y(e^e, 1) = e^e$.

Rechercher l'équation de la tangente et celle de la normale au point $(e,1)$ à la courbe d'équation $f\left(x^x, y^{1/y}\right) = 0$.

Même question pour la courbe d'équation $(2y)^{x+1} + \sin\pi(x+y) = 0$ au point $(0,1)$.

3. (Supp) $Soit\ f(x,y,z) = x^2y + e^x + z.\ Vérifier$ que $f(0,1,-1) = 0$ et montrer qu'il existe une fonction de classe C^1 au voisinage du point $(1,-1)$ $telle\ que\ g(1,-1) = 0\ et\ f(g(y,z),y,z) = 0$.

Calculer le gradient de g au point $(1,-1)$.

II.Fonctions vectorielles de plusieurs variables

Exercice 1 : Calculer les matrices jacobiennes des applications suivantes :

1. $f(r,\theta,\varphi) = (r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)$ 2. $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$
2. (Supp) $f(x,y,z) = 4y^3 - 3x^2 + y\ \ \sin 2z$ 3. (Supp)$f(x,y,u,v) = (u + 2yv - 3x^2 - y, xu + yv)$.

4. $f(x,y,z) = (yz, x + xyz + z)$ 5. $f(t) = (e^{-t}ch3t, e^{-t}sht, te^{-t})$ 6. $f(x,y,z) = (2x - z, y, x + 3z)$

7. $f(X) = AX + B\ \ X \in R^n$(A matrice $(m,n)B \in R^m$. 8. $f(X) = (\|X\|^2, X)$

Exercice 2 :

1/Soit $f: R^2 \to R^3$ telle que $f(0,0) = (-1,1,0)$ et $J_f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

Soit $g(x,y,z) = (2z - y, -x^2 + 3yz)$, calculer $d(gof)(0,0)$.

2/ Soit $f: R^3 \to R^3$ telle que $J_f(0,0,1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Soit $g(x,y) = \left(\frac{ye^x}{\sqrt{1+y^2}}\ , y\ , \left(\frac{4}{\pi}\arctan\sqrt{1+y^2}\right)\right)$, calculer $d(fog)(0,0)$.

3/ (supp) Soient $f: R^3 \to R^2$ de classe C^1 et $g : R^2 \to R^2$ telles que :

$g(u,v) = f(\cos u + \sin v, \sin u + \cos v, e^{u-v})$ et $J_f(1,1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

Montrer que g est de classe C^1 et déterminer $dg\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

5/(supp) Calculer $d(gof)(0,0,0)$ pour les fonctions telles que :

a)$f(x,y,z) = \left(\frac{x}{2} + yz^2 - 1, x + y\right)$ et $g(x,y) = \left(y\arcsin x, x\arctan y, \operatorname{argch}(x - y)\right)$

b) $g(x,y,z) = ((x - y + z)^2, x + 4xy - z)$ et $f(x,y) = \left(-xe^{-x+y^2}, \sin x - 3xy, (x - y^2)^3\right)$

Exercice 26 : Les fonctions y et z de la variable x sont définies par le système d'équations :

$\begin{cases} x^2 + y^4 - z^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 5 \end{cases}$ calculer $y'(0)$ et $z'(0)$.

Exercice3(supp)

Supposons que (x_0, y_0, z_0, u_0) soit une solution du système d'équations :

$$\begin{cases} f(x) + f(y) + f(z) = F(u) \\ g(x) + g(y) + g(z) = G(u) \\ h(x) + h(y) + h(z) = H(u) \end{cases}$$

avec f,g,h,F,G,H de classe C^1 sur R.

1. Donner une condition suffisante pour résoudre x, y, z en fonctions de u dans un voisinage de (x_0, y_0, z_0, u_0)
2. Appliquer cette condition au cas : $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x^3$.

Exercice 4:

(supp)1/ Démontrer que l'on peut résoudre le système d'équations :

$\begin{cases} u^2 + v^2 = \ln x \\ u^3 + 2v^3 = \ln y \end{cases}$ dans un voisinage ouvert de $(1,1)$ dans la forme $u = f(x, y)$ et $v = g(x, y)$ calculer $d\phi(e^2, e^3)$ où $\phi = (f, g)$.

2/Montrer que le TFI est applicable et calculer les partielles *premières* aux points donnés

1. $F(x, y; u, v) = (2x - 3y + u - v, x + 2y + u + 2v\ )$ au point$(0,0,0,0)$
2. $F(x, y; u, v) = (x - 2y + u + v - 8, x^2 - 2y^2 - u^2 + v^2\ - 4)$ au point$(3, -1,2,1)$.

Exercice 5:

1/Vérifier que l'application $(x, y) \longmapsto (u = x + x^2 + y, v = x^2 + y^2)$ définit une application bigective dans un voisinage ouvert de $(x, y) = (5; 8)$.

2/(supp)Montrer que le théorème d'inversion locale est applicable et trouver l'inverse pour les fonctions $\varphi\ (x, y) = (x, x^2 + y)$ et $\varphi\ (x, y) = (2x - 3y, x + 2y)$.

Exercice 6: (supp)

Soit $\varphi: R^2 \to R^2$ telle que $\varphi\ (x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.Vérifier que $\varphi'(x, y)$ est inversible sur $R^2 - \{(0,0)\}$ mais l'application φ n'est pas injective dans $R^2 - \{(0,0)\}$.

Si $D = \{(x, y): x > 0\ et\ y > 0\}$ et $D' = \{(x, y): y > 0\ \}$,vérifier que $\varphi: D \to D'$ est un homéomorphisme déterminer φ^{-1}explicitement.

Exercice 7:

1/ On considère l'application « pli » définie par : $f: R^2 \to R^2$ telle que $\begin{cases} X = x \\ Y = y^2 \end{cases}$

En quels points est-ce un difféomorphisme local ? global ? quel est l'image inverse .

2/Même question pour les applications $f, g: R^3 \to R^3$ définies par : $f(x, y, z) = (x + z, yz - 3x, z^2)$ et $g(x, y, z) = (e^{2x}+e^{2z}, e^{2x}-e^{2z}, x - y)$.

3/(supp) Soit $f: R^2 \setminus \{(0,0)\} \to R^2$ telle que $\begin{cases} X = \frac{x}{y} \\ Y = x^2+y^2 \end{cases}$

Montrer que f est un C^∞ difféomorphisme local dans $R^2 \setminus \{(0,0)\}$, est-il global ?

Exercice 10

Soit l'application f de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y)\ = \left(sin\frac{y}{2} - x, sin\frac{x}{2} - y\right)$.

1. Justifier que f est de classe C^1, calculer sa différentielle , vérifier que $df(x, y)$ est inversible pour tout (x, y) dans $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $f(\mathbb{R}^2)$ et justifier que $f(\mathbb{R}^2)$) est un ouvert.
3. Montrer que f^{1} est lipschitzienne (on prendra comme norme sur $\mathbb{R}^2$: $\|(x, y)\| = |x| + |y|$.
4. En déduire que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2 sur\ \mathbb{R}^2$.
5. Calculer. $df^{-1}\left(1 - \frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} - \pi\right)$