Fonctions de plusieurs variables

I. Différentiabilité

Cas de deux variables *U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$* et $(x_0, y_0) \in U$

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}$
- f est différentiable au point (x_0, y_0) $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{\|(h,k)\|\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k}{\|(h,k)\|} = 0.$
- $df((x_0, y_0)) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$: $\quad df(x_0, y_0)(h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, h + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, k = < \nabla f(x_0, y_0), (h, k) >.$
- La dérivée directionnelle de f suivant la direction $\vec{v}$(a,b) au point (x_0, y_0):
  $D_{\vec{v}} f(x_0, y_0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(x_0 + ta, y_0 + tb) - f(x_0, y_0)}{t}$, si f est diff^{ble} alors $D_{\vec{v}} f(x_0, y_0) = < \nabla f(x_0, y_0), \vec{v} >$
  (en général $\|\vec{v}\| = 1$ ie $\vec{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$)
- *Si f, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}$ sont continues dans U alors* f de Classe C^1 dans U.
- Si toutes les dérivées partielles jusqu'à l'ordres n (ncompris)sont continues dans U alors f est de ClasseC^n dans U.
- Si f est de classe C^2 dans U alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \quad \forall (x, y) \in U$.(Thm .**Schwartz)**
  (Idem pour les fonctions de n variables n$\geq$ 3)

	$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$	$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
f est différentiable	$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.\quad \nabla f = grad f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$	$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz.\quad \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$
f est de classe C^2	$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2.$	$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}dydz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}dxdz + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2.$
d.l à l'ordre 2	$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + \frac{1}{2}[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2\ ] + \|(h,k)\|^2 \varepsilon((h,k)).$ avec $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon((h,k)) = 0.$	$f(a + H) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a)k + \frac{\partial f}{\partial z}(a)l + \frac{1}{2}[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)hk + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(a)hl + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(a)kl + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)k^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a)l^2] + \|H\|^2 \varepsilon(H).$ avec $H = (h, k, l)$ et $\lim\limits_{H\to(0,0,0)} \varepsilon(H) = 0.$

Formes différentielles :

- Soient P(x,y) et Q(x,y) de classe C^1 :w= *P(x,y)***dx**+*Q(x,y)***dy** est **totale** ssi $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.
- Soient P(x,y,z) ,Q(x,y,z) et R(x,y,z) de classe C^1 ,la forme différentielle
  W=P(x,y,z) **dx**+ Q(x,y,z) **dy** + R(x,y,z)**dz** est **totale** ssi $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$; $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$ et $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$.

- L'équation du **plan tangent** à la surface régulière $f(x, y, z) = 0$ au point (x_0, y_0, z_0) s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_0}) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z_0}) = 0$$

II. Extrema libre

- f est différentiable dans U *et $a \in U$*, f(a) *est un extrémum* $\Rightarrow$ df(a)=0 (a est un point critique)
- Dans $\mathbb{R}^2$,si df(a)=0 , f est de classe C^2 et $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

$$\Delta = s^2 - rt, \begin{cases} \Delta < 0 \text{ et } r < 0 \Rightarrow f(a) \text{ est un maximun} \\ \Delta < 0 \text{ et } r > 0 \Rightarrow f(a) \text{ est un minimun} \\ \Delta > 0 \Rightarrow f(a) \text{ n'est pas un extremun, a est un point selle} \end{cases}$$

Si $\Delta = 0$ on ne peut rien conclure, il faut revenir à la définition d'extremum et étudier le signe de l'accroissement $f(x, y) - f(a)$ au voisinage du point a).

- Matrice Hessienne d'une fonction de classe C^2 :$H_f = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\right)$ i,j=1,...n.

Dans $\mathbb{R}^3$, $H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix}$

- Si f est de classe C^2 , H_f est symétrique et toutes ses valeurs propres sont réelles.
- Si H_f (a) est définie positive alors f(a) est un minimum local.
- Si H_f (a) est définie négative f(a) est maximum local.
- Si H_f (a) admet des valeurs propres de signes contraires alors f admet un point selle en a.

(Même chose dans $\mathbb{R}^n$)

III. Extrema liés

$Trouver\ l'extrémum$ de f(x) sous la contrainte g(x)=0, x=$(x_i) i = 1, \dots, n$ revient à chercher $l'extrémum$ de la fonction auxiliaire dite de Lagrange : $\boldsymbol{\Phi(x) = f(x) + \lambda g(x)}$ $\boldsymbol{\lambda}$: ***Multiplicateur de Lagrange***

La condition nécessaire d'extremum: d$\boldsymbol{\Phi}$(a)=0 **avec la condition** g(a)=0

pour le caractère d'extrémum, on étudie le signe de $d^2\boldsymbol{\Phi}$(a) avec la condition dg(a)=0.

IV. Fonctions vectorielles

- Soit f : U $\subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (U :ouvert) $f = (f_i)$ i =1,...m . Si f est différentiable en a, alors $\mathbf{d}f(\boldsymbol{a}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$,sa matrice

Jacobienne est donnée par : $\mathfrak{J}_f = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \vdots \\ \nabla f_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1 & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_1 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_m & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_m \end{pmatrix}$

- Si n=m,le **Jacobien** est le déterminent de la matrice Jacobienne : $det(\mathfrak{J}_f) = \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}$

V. Fonctions implicites

- Théorèmes des fonctions implicites

Soit f : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et (a,b) un point de D_f. Si	Soit f : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et (a,b,c) un point de D_f. Si
f(a,b)=0 ;	**f(a,b ,c)=0 ;**
f est différentiable au V(a,b) ;	**f est de classe C^1 au V(a,b,c) ;**
$\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0}$;	$\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) \neq 0}$;
Alors $\exists \mathcal{V} = V(a), \mathcal{W} = V(b)$ **et** $\varphi; \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ **continue telle que :** $\varphi(a) = b$ **et f(x,** $\varphi(x)$**)=0** $\forall x \in \mathcal{V}$	**Alors** $\exists \mathcal{V} = V(a,b), \mathcal{W} = V(c)$ **et** $\varphi; \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ **de classe C^1 telle que :** $\varphi(a,b) = c$ **et** $f(x,y,\varphi(x,y))$**=0** $\forall x \in \mathcal{V}$
si f est diffble **alors** φ **est diff**ble **et** $\varphi'(x) = -\frac{f'_x(x,\varphi(x))}{f'_y(x,\varphi(x))}$	$\varphi'_x(x,y) = -\frac{f'_x(x,y,\varphi(x,y))}{f'_z(x,y,\varphi(x,y))}, \varphi'_y(x,y) = -\frac{f'_y(x,y,\varphi(x,y))}{f'_z(x,y,\varphi(x,y))}$.

- **Théorème des fonctions implicites généralisé (cas vectoriel)**

Soit f :$\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et (a,b) un point de D_f $avec\ a \in \mathbb{R}^m$ et b $\in \mathbb{R}^n$.

$f(X,Y) = (f_1(X,Y), \dots, f_n(X,Y)) : X = (x_i)_{1 \le i \le m} \in \mathbb{R}^m , Y = (y_i)_{1 \le i \le n} \in \mathbb{R}^n$ Si

- f (a,b)=0 ;
- f est de classe C^1 au $\mathcal{V}((a,b))$;
- $det(\mathfrak{J}_Y f(a,b))) \neq 0$ où $\mathfrak{J}_Y f = \left(\frac{\partial}{\partial y_j} f_i\right)$ i , j = 1,. . . n. où $\mathfrak{J}_X f = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f_i\right)$ i = 1, … , n , j = 1,. . . m.

Alors $\exists V = \mathcal{V}(a), \mathcal{W} = \mathcal{V}(b)$ et φ; V $\to \mathcal{W}$ de classe C^1 telle que :

$\varphi(a) = b$ et $f(X, \varphi(X)) = 0_{\mathbb{R}^n}$ $et\ \mathfrak{J}_\varphi(X) = -\mathfrak{J}_Y{}^{-1} f(X, \varphi(X)) . \mathfrak{J}_X f(X, \varphi(X))$ $\forall X \in V$.

VI. Fonctions inverses

Soit $f: A \to B$ où $A \subset \mathbb{R}^m$ et B $\subset \mathbb{R}^n$.

- f est un homéomorphisme si f est bijective et f ainsi que f^{-1} sont continues.
- f est un C^k –difféomorphisme si f est bijective et f ainsi que f^{-1} sont de classe C^k, k≥ 1.

Thm .Inv.Loc :**Soit** $\boldsymbol{f: U \to \mathbb{R}^n}$ ***où U est un ouvert de*** $\mathbb{R}^n$**, une fonction de classe C^k, k≥ 1.**

Si $\boldsymbol{\forall a \in U, f'(a)}$ ***est inversible alors f est un*** $\boldsymbol{C^k}$ **–difféomorphisme local autour de a**.

VII. Opérateurs différentiels

Nabla :$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, $\vec{\nabla}$f = $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \overrightarrow{grad} f$ où f est un champ scalaire.

Laplacien : $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$. où f est un champ scalaire

Divergence : div $\vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} . = \vec{\nabla} . \vec{f}$ où $f = (f_1, f_2, f_3)$ un champ vectoriel.

Rotationel : rot$\vec{f}$=:$\vec{\nabla} \wedge \vec{f}$ =$\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)$