II. Fonction vectorielle de plusieurs variables

1.Définition :

Une **fonction vectorielle de plusieurs variables** est une fonction de la forme

$f : E \subseteq \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \rightarrow \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$

où m et n sont des entiers plus grands ou égaux à 1. E est son domaine et $\mathbb{R}^m$ son codomaine. Plus précisément, une fonction vectorielle est un vecteur dont chaque composante $f_i(x)$ est une fonction scalaire (réelle):

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \left(\boldsymbol{f_1}(\boldsymbol{x}), \dots, \boldsymbol{f_m}(\boldsymbol{x})\right)$$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ étant un point de E.

- *Les fonctions scalaires sont donc des cas particuliers de fonctions vectorielles dans le sens qu'un réel peut être considéré comme un vecteur ayant une seule coordonnée.*

Exemples ---

1. La fonction vectorielle ρ : D$\subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$qui lie les coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes:

$$\rho(r,\theta) = (rcos\theta, rsin\theta) = (x,y)$$

le domaine des variables (r,θ)étant le sous-ensemble D du plan $rO\ \theta$ défini par $r \geq 0$ et $0 \leq \theta < 2\pi$.

2. La fonction vectorielle

$$f(x,y) = (x^2 + y^2, 2xy,\ x^2 - y^2)$$

de deux variables possède trois composantes (ou trois fonctions coordonnées), soient $f_1(x) = x^2 + y^2; f_2(x) = 2xy\ \ et\ f_3(x)\ = x^2 - y^2$.
Son domaine de définition est $\mathbb{R}^2$, car chacune des fonctions coordonnées y est bien définie, son codomaine est $\mathbb{R}^3$ puisque la fonction vectorielle comprend trois composantes. On peut alors écrire f : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

3. La fonction

$$f(x,y) = \left(\sin xyz\,, xe^{x^2+y^2+z^2}\ \ , lnz\right)$$

en est une de trois variables à valeur dans $\mathbb{R}^3$et dont le domaine D est le demi-espace $z > 0$. On a alors f: D$\subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

2.Limite et continuité d'une fonction vectorielle

2.1. Limite : Soit $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad x \mapsto f(x) = \left(f_1(x), \dots, f_m(x)\right)$;
$a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in E$ et $l = (l_1, l_2, \dots, l_n) \in \mathbb{R}^m$ alors :

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f_i(x) = l_i}$$

2.1. Continuité :

La fonction f est continue au point a∈ E (respectivement sur E) si et seulement si toutes les composantes f_i (i=1,..,m) de f sont continues au point a(respectivement sur E).

- Toutes les opérations algébriques sur les fonctions continues restent valables pour les fonctions vectorielles continues .

Exemple :

Soit $f : \mathbb{R}^2 - \Delta \to \mathbb{R}^3 \ avec \ \Delta = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R})\}$

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \left(\frac{x}{y^2+1}, sin(x-y), \frac{e^{xy}-1}{y}\right)$$

f est continue sur $\mathbb{R}^2 - \Delta$ car chacune des fonctions composantes :

$f_1(x) = \frac{x}{y^2+1}; f_2(x) = sin(x-y) \ et \ f_3(x) = \frac{e^{xy}-1}{y}$ est continue sur $\mathbb{R}^2 - \Delta$.

3.Dérivée d'une fonction vectorielle

Les concepts de dérivée suivant une courbe, de dérivée directionnelle (suivant une direction) et de dérivée (tout court) d'une fonction vectorielle f de plusieurs variables s'appuient sur ceux

des fonctions scalaires, car chacune des composantes f_i de f est une fonction scalaire(réelle).

3.1 Définition 1 : *Une* fonction vectorielle de plusieurs variabl**es** f définie dans un voisinage de $a \in \mathbb{R}^n$ *est* ***différentiable*** *au point* a *si et seulement si chacune de ses composantes* f_i *est* ***différentiable*** *au point* a.

3.2. Définition 2 : Matrice Jacobienne :

- On appelle matrice Jacobienne de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *au point* $a \in \mathbb{R}^n$ et note $\mathcal{J}_f(a)$, la matrice à **m lignes** et **n colonnes** (de format m× n):

$$\boxed{\mathcal{J}_f(a) \overset{def}{\equiv} \begin{pmatrix} \overrightarrow{grad} f_1(a) \\ \overrightarrow{grad} f_2(a) \\ \vdots \\ \overrightarrow{grad} f_m(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}}$$

- Si f est de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{J}_f(a)$ est une matrice carrée, son déterminant $|\mathcal{J}_f(a)|$ s'appelle jacobien de f *qu'on note aussi* $\frac{D(f_1,\ldots,f_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)}$.

Exemple

1) Trouvons la matrice jacobienne de la fonction des variables ϕ et θ

$$f(\varphi, \theta) = \left(\underbrace{acos\theta sin\varphi}_{f_1(\varphi,\theta)}, \underbrace{asin\theta sin\varphi}_{f_2(\varphi,\theta)}, \underbrace{acos\varphi}_{f_3(\varphi,\theta)}\right)$$

La matrice jacobienne de f au point (ϕ, θ) est égale à :

$$\mathcal{J}_f(\varphi,\theta)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial\varphi}(\varphi,\theta) & \frac{\partial f_1}{\partial\theta}(\varphi,\theta)\\ \frac{\partial f_2}{\partial\varphi}(\varphi,\theta) & \frac{\partial f_2}{\partial\theta}(\varphi,\theta)\\ \frac{\partial f_3}{\partial\varphi}(\varphi,\theta) & \frac{\partial f_3}{\partial\theta}(\varphi,\theta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} acos\theta cos\varphi & -asin\theta sin\varphi\\ asin\theta cos\varphi & acos\theta sin\varphi\\ -asin\varphi & 0\end{pmatrix}$$

2) $\rho:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ $\rho(r,\theta)=(rcos\theta, rsin\theta)$

$$\mathcal{J}_\rho(r,\theta)=\begin{pmatrix}cos\theta & -rsin\theta\\ sin\theta & rcos\theta\end{pmatrix}\quad |\mathcal{J}_\rho|=\mathrm{r}$$

On sait que la différentielle d'une fonction scalaire f_i est liée à son gradient $\overrightarrow{grad}f_i$ par la relation :

$$Pour\ tout\ H\ \in E\quad d\,f_i(\,x)(H)=<\overrightarrow{gradf_i(\,x)}\,,H>$$

En ce qui concerne la différentielle fonction vectorielle f et sa relation avec la matrice Jacobienne on a la proposition suivante:

3.4.Proposition : Si f *est **différentiable** au point* $a\in\mathbb{R}^n$alors la différentielle de f *au point* a *est **une application linéaire de*** $\mathbb{R}^n$ ***dans*** $\mathbb{R}^m$ *, elle est représentée sur les bases canoniques de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\mathbb{R}^m$ *par la matrice jacobienne* $\mathcal{J}_f(a)$ et on a :

$$\boxed{Pour\ tout\ H\in\mathbb{R}^n\quad d\,f(a)(H)=\mathcal{J}_f(a)\,.H};$$

Remarques :

- $d\,f(a)\ \in\ \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$
  - $Matriciellement: d\,f(a)(H)=\mathcal{J}_f(a)\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_n\end{pmatrix}$
- Les propriétés algébriques habituelles (combinaisons linéaires,produit)sur les fonctions différentiables restent valables pour les fonctions vectorielles différentiables

Définition 3 : On dit que f *est de classe* C^1 *sur un ouvert* U *de* $\mathbb{R}^n$ *si et seulement si chacune de ses composantes* f_i *est de classe* C^1 *sur* U.

3.5. Dérivée suivant une direction :

Proposition : Si f *est différentiable au point* $a\in\mathbb{R}^n$alors la dérivée $D_{\vec v}f(a)$suivant un vecteur $\vec v$ *(ou dérivée directionnelle)* est donnée par la formule :

$$\boxed{D_{\vec v}f(a)=\mathcal{J}_f(a)\,.\vec v}$$

Exemple :

a) Trouver au point$(1,1)$ la différentielle de la fonction définie par $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$

$$f(x,y)=(x+y, ln(x^2+y^2), cosy)$$

b) Trouver sa dérivée directionnelle suivant $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ au même point.

Solution :

a) La différentielle de la fonction est donnée par sa matrice jacobienne au point donné:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{2x}{x^2+y^2} & \dfrac{2y}{x^2+y^2} \\ 0 & -\sin y \end{pmatrix}_{(1,-1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & \sin 1 \end{pmatrix}.$$

$$\forall\, H = (h,k) \in \mathbb{R}^2 \quad d\,f(a)(H) = \mathcal{J}_f(a)\,.\,H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & sin1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h+k \\ h-k \\ k.\,sin1 \end{pmatrix}$$

b)
La dérivée directionnelle suivant la direction $\vec{v}$ a pour valeur

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & \sin 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \sin 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

3.6.Dérivée de la fonction composée:

Proposition :

Soient $\varphi : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et $\psi : B \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ où $\varphi(A) \subset B$.

Si φ est différentiable au point $a \in A$ et ψ est différentiable au point $\varphi(a)$,alors la fonction composée F= $\psi o \varphi$ est différentiable au point a et l'on a :

$$\boxed{\boldsymbol{d(\psi o \varphi)(a) = \mathbf{d}\,\psi\big(\varphi(a)\big) o d\varphi(a)}}$$

Matriciellement : $\boxed{\boldsymbol{\mathcal{J}_F(a) = \mathcal{J}_\psi\big(\varphi(a)\big).\mathcal{J}_\varphi(a)}}$

Exemple 1 (Dérivée le long d'une courbe)
Trouvons le taux de variation de $f(x,y,z) = \left(x, \sqrt{y}, \sqrt[3]{z}\right)$ le long de la trajectoire $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ par rapport à t au point $(2,4,8)$.

<u>*Solution*</u> : Au point $(2,4,8)$ t=2. Il suffit donc de calculer $\left.\frac{d\,F(t)}{dt}\right|_{t=2}$ $\quad avec\ F(t) = f\big(x(t), y(t), z(t)\big)$.En appliquant la formule de la composée, on a :

$$\mathcal{J}_F(t) = \mathcal{J}_f\big(\gamma(t)\big).\mathcal{J}_\gamma(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\gamma(t))}{\partial x} & \frac{\partial f_1(\gamma(t))}{\partial y} & \frac{\partial f_1(\gamma(t))}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2(\gamma(t))}{\partial x} & \frac{\partial f_2(\gamma(t))}{\partial y} & \frac{\partial f_2(\gamma(t))}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3(\gamma(t))}{\partial x} & \frac{\partial f_3(\gamma(t))}{\partial y} & \frac{\partial f_3(\gamma(t))}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3t^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{J}_F(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{J}_F(2)=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exemple2 :

a) Trouvons la forme que prend la fonction
$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ si

$x = x(\varphi,\theta) = cos\theta sin\varphi,\ y = y(\varphi,\theta) = sin\varphi sin\theta\ etz = \ z(\varphi,\theta) = cos\varphi.$

b) Trouvons ensuite ses dérivées partielles par rapport aux variables φ et θ.

<u>*Solution* :</u>

a) La fonction F(φ, θ)= $f(cos\theta sin\varphi, sin\varphi sin\theta, cos\varphi)$est définie par

*F(φ, θ)=$(cos\theta sin\varphi)^2$+2$(sin\varphi sin\theta)^2$+3$(cos\varphi)^2$ $= fo\sigma(\varphi,\theta)$ avec

$$\sigma: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\ telle\ que\ \sigma(\varphi,\theta) = (cos\theta sin\varphi, sin\varphi sin\theta, cos\varphi)$$

b) En dérivant cette expression par rapport à φ et par rapport à θ, on obtient

$\mathcal{J}_f(x,y,z)$=$(2x \quad 4y \quad 6z) = (2cos\theta sin\varphi \quad 4sin\varphi sin\theta \quad 6cos\varphi)$

$$\mathcal{J}_\sigma\big((\varphi,\theta)\big) = \begin{pmatrix} cos\theta cos\varphi & -sin\theta sin\varphi \\ sin\theta cos\varphi & cos\theta sin\varphi \\ -sin\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{J}_F\big((\varphi,\theta)\big) = \mathcal{J}_f(x,y,z).\mathcal{J}_\sigma\big((\varphi,\theta)\big) =$
$(2cos\theta sin\varphi \quad 4sin\varphi sin\theta \quad 6cos\varphi)\begin{pmatrix} cos\theta cos\varphi & -sin\theta sin\varphi \\ sin\theta cos\varphi & cos\theta sin\varphi \\ -sin\varphi & 0 \end{pmatrix}$.

$\mathcal{J}_F\big((\varphi,\theta)\big) = (sin^2\theta - 2sin2\varphi \qquad sin^2\varphi sin2\theta) = \left(\frac{\partial F}{\partial\varphi}\ , \frac{\partial F}{\partial\theta}\right)$.

Ainsi :
$\frac{\partial F}{\partial\varphi} = sin^2\theta sin2\varphi - 2sin2\varphi$ et $\frac{\partial F}{\partial\theta} = sin^2\varphi sin2\theta$

Remarque : On peut vérifier les résultats en dérivant directement la fonction F(φ, θ)dans*
Par rapport à $\varphi\ et\theta$.