Faculté des Sciences — 2018/2019

Département de Mathématiques — Durée: 1h 30mn

Rattrapage d'analyse numérique 2
Corrigé

Exercice 1 (sur 4.5)

On considère la matrice suivante:

$$A=\begin{pmatrix}4&2&0\\2&5&2\\0&2&5\end{pmatrix}$$

1. Calculer la factorisation LU de la matrice A.
2. A partir de la décomposition LU, calculer le déterminant de A.
3. A partir de la décomposition LU, calculer la matrice inverse de A.

Solution

1. On pose $A^{(1)}=A$; $\quad M^{(1)}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1/2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$A^{(2)}=M^{(1)}A^{(1)}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1/2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2&0\\2&5&2\\0&2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2&0\\0&4&2\\0&2&5\end{pmatrix}$

alors $M^{(2)}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1/2&1\end{pmatrix}$ et $A^{(3)}=M^{(2)}A^{(2)}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1/2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2&0\\0&4&2\\0&2&5\end{pmatrix}=$
$\begin{pmatrix}4&2&0\\0&4&2\\0&0&4\end{pmatrix}=U$

$L=M^{(1)^{-1}}M^{(2)^{-1}}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1/2&1&0\\0&1/2&1\end{pmatrix}$

En conclusion

$$A=LU=\begin{pmatrix}1&0&0\\1/2&1&0\\0&1/2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2&0\\0&4&2\\0&0&4\end{pmatrix}$$

2. $\det(A)=\det(L)\det(U)=\det(U)=64$

3. Le système $Ax=b$ est équivalent à $\begin{cases}Ly=b\\Ux=y\end{cases}$

En prenant $b=e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

le système $Ly=e_1$

$\begin{pmatrix}1&0&0\\1/2&1&0\\0&1/2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, a pour solution $y=\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}$

la solution du système $Ux = y$

ie $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, est: $\begin{pmatrix} \frac{21}{64} \\ -\frac{5}{32} \\ \frac{1}{16} \end{pmatrix}$

En prenant $b = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, le système $Ly = e_2$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, a pour solution $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$,

la solution du système $Ux = y$

ie $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, est $\begin{pmatrix} -\frac{5}{32} \\ \frac{5}{16} \\ -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$,

Finalement pour $b = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

le système $Ly = e_3$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, a pour solution $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

la solution du système $Ux = y$

ie $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, est $x = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} \\ -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

L'inverse de la matrice A est

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{21}{64} & -\frac{5}{32} & \frac{1}{16} \\ -\frac{5}{32} & \frac{5}{16} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (sur 4.5)

1. Donner lorsqu'elle existe la décomposition LU des matrices qui suivent et lorsque ce n'est pas possible en donner une décomposition PLU,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. On considère la matrice

$$D = \begin{pmatrix} \cos(\pi/3) & -\sin(\pi/3) \\ \sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{pmatrix}$$

Calculer son conditionnement pour la norme ∞. Que peut-on conclure?

Solution

1. $\delta_1 = \det(0) = 0$, donc A n'admet pas de décomposition LU.

On permute la première ligne et la deuxième ligne

$PA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = U$

donc $A = PLU = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
$B = LU$ avec $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$
$U = M^{(1)}C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ donc $C = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
2. $cond_\infty(D) = \|D\|_\infty \|D^{-1}\|_\infty$
$\|D\|_\infty = \sin(\pi/3) + \cos(\pi/3)$
$D^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/3) & -\sin(\pi/3) \\ \sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{pmatrix} = D$

ce qui implique $cond_\infty(D) = (\sin(\pi/3) + \cos(\pi/3))^2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$
On conclu que la matrice D est bien conditionnée.

Exercice 3 (sur 5.5)
Etudier la convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel pour la résolution du système $Ax = b$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution
On pose $A = D - E - F$ avec

$$D = I, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } F = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice d'itération de Jacobi s'écrit:

$$B_J = D^{-1}(E + F) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui implique $\det(B_J - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 = 0$
donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ et $\rho(B_J) = 0 < 1$
En conclusion la méthode de Jacobi converge.
La matrice de Gauss-Seidel s'écrit:

$$B_{GS} = (D - E)^{-1} F$$

Sachant que

$$(D - E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

alors

$$B_{GS} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ce qui implique

$$\det(B_{GS}-\lambda I)=\lambda\,(\lambda-2)^2$$

Il s'en suit que les valeurs propres de B_{GS} sont $\lambda_1=0$ et $\lambda_2=\lambda_3=2$.
D'où

$$\rho\,(B_{GS})=2>1$$

En conclusion la méthode de Gauss-Seidel diverge.

Exercice 4 (sur 5.5)

On considère le problème

$$(P):\begin{cases} y'\,(t)=t+3\dfrac{y\,(t)}{t} & t\in[1,2] \\ y(1)=0 \end{cases}$$

1. Vérifier que (P) admet une solution unique.
2. Trouver la solution exacte du problème.
3. Calculer l'approximation de la solution au point $t=1.2$ par la méthode d'Euler explicite avec $h=0.1$
4. Trouver, en fonction du pas h, une borne de l'erreur de l'approximation de la solution du problème (P) au point $t=2$, par la méthode d'Euler explicite.

Solution

1. On pose $f(t,y)=t+3\dfrac{y}{t}$,avec $(t,y)\in[1,2]\times\mathbb{R}$. La fonction f est continue.
De plus $\forall t\in[1,2]\,,\forall\,(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}|f(t,y_1)-f(t,y_2)| &= \frac{3}{t}\,|y_1-y_2| \\ &\leq 3\,|y_1-y_2|\end{aligned}$$

La fonction f est lipschitzienne par rapport à y de constante $L=3$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence et l'unicité de la solution du problème (P).

2. L'equation différentielle sans second membre du problème (P) s'ecrit:

$$\frac{dy}{y}=\frac{3}{t}dt$$

Par intégration on a:

$$\ln|y|=3\ln|t|+c,c\in\mathbb{R}$$

Donc la solution de l'équation différentielle sans second membre est $y(t)=kt^3$.
En utilisant la méthode de variation de la constante à l'équation différentielle du problème (P) on obtient:

$$k'(t)=t^{-2}$$

et donc

$$k(t)=-\frac{1}{t}+c$$

La solution générale de l'équation différentielle est donc

$$y(t) = \left(-\frac{1}{t} + c\right) t^3$$

La condition initiale de (P) donne $c = 1$. la solution du problème (P) est donc $y(t) = t^3 - t^2$.
3. On rappelle la formule d'Euler explicite: $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$
$y_0 = 0$
$y(1.1) \approx y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) = hf(1, 0) = h = 0.1$
$y(1.2) \approx y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1) = h + hf(1.1, h) = h\left(1 + 1.1 + 3\dfrac{h}{1.1}\right) = 0.1(2.1 + \frac{3}{11}) \approx 0.237$
4. On rappelle la formule de la borne de l'erreur commise par l'approximation d'Euler , pour tout $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$, $h = \frac{1}{N}$

$$|y(t_n) - y_n| \leq \frac{Mh}{2L}\left(e^{L(t_n - t_0)} - 1\right)$$

avec $M = \max\limits_{t \in [1,2]} |y''(t)|$
Au point $t = 2$

$$|y(2) - y_N| \leq \frac{Mh}{6}\left(e^3 - 1\right)$$

Reste à déterminer M.
$y'(t) = 3t^2 - 2t \Rightarrow y''(t) = 6t - 2 \Rightarrow y'''(t) = 6 > 0$.
On voit que la fonction $y''(t)$ est croissante et positive sur $[1.2]$ alors $M = 10$.
Donc

$$|y(2) - y_N| \leq \frac{5}{3}\left(e^3 - 1\right) h$$