Faculté des Sciences — 2018/2019
Département de Mathématiques — Durée: 1h 30mn

Examen final d'analyse numérique 2
Corrigé

Exercice 1 (5 points)
On considère le problème de Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), t \in [0, T] \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

1. Soit $h > 0$ donné et soit y_n une approximation de la solution $y(t_n)$, au point $t_n = nh, n = 0, 1, \ldots, N$. Ecrire l'équation différentielle sous forme intégrale puis déduire de la formule des trapèzes le schéma (M) suivant:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(t_{n+1}, y_{n+1}) + f(t_n, y_n)\right] \quad n = 0, \ldots, N-1$$

2. Analyser la stabilité absolue du schéma (M).
Solution
1. En intégrant l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$ entre t_n et t_{n+1} on a:

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt$$

Si on utilise la formule des trapèzes ie

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt \approx \frac{h}{2}\left[f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) + f(t_n, y(t_n))\right]$$

on obtient

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) \approx \frac{h}{2}\left[f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) + f(t_n, y(t_n))\right]$$

On propose de calculer la suite $(y_n)_n$ approximation de la solution par la formule

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}\left[f(t_{n+1}, y_{n+1}) + f(t_n, y_n)\right] \quad n = 0, \ldots, N-1 \\ & y_0 \text{ donné} \end{aligned}$$

2. Considérons le problème test $y'(t) = -\lambda y(t)$ avec $\lambda > 0$.
L'application du schéma précédent au problème test engendre la suite $(y_n)_n$ définie par:

$$y_{n+1} = y_n - \lambda\frac{h}{2}\left[y_{n+1} + y_n\right]$$

C'est la suite géométrique

$$y_{n+1} = \frac{2 - \lambda h}{2 + \lambda h} y_n$$

ce qui implique

$$y_n = \left(\frac{2-\lambda h}{2+\lambda h}\right)^n y_0$$

Par conséquent

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0 \Leftrightarrow \left|\frac{2-\lambda h}{2+\lambda h}\right| < 1$$

On pose $g(x) = \dfrac{2-x}{2+x}, x > 0$

On a $g(0) = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -1$, $g'(x) = -\dfrac{4}{(x+2)^2} < 0 \Rightarrow |g(x)| < 1, \forall x > 0.$

En conclusion le schéma (M) est inconditionnellement stable.

Exercice 2 (7 points)

On considère le problème

$$(P) : \begin{cases} y'(t) = \left(\dfrac{1}{t}+1\right) y(t) & t \in [1,2] \\ y(1) = e \end{cases}$$

1. Vérifier que (P) admet une solution unique.
2. Trouver la solution exacte du problème.
3. Calculer l'approximation de la solution au point $t = 1.2$ par la méthode d'Euler explicite avec $h = 0.1$
4. Trouver, en fonction du pas h, une borne de l'erreur de l'approximation de la solution du problème (P) au point $t = 2$, par la méthode d'Euler explicite.

Solution

1. On pose $f(t,y) = \left(\dfrac{1}{t}+1\right) y$,avec $(t,y) \in [1,2] \times \mathbb{R}$. La fonction f est continue.

De plus $\forall t \in [1,2], \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} |f(t,y_1) - f(t,y_2)| &= \left(\frac{1}{t}+1\right)|y_1 - y_2| \\ &\leq 2|y_1 - y_2| \end{aligned}$$

La fonction f est lipschitzienne par rapport à y de constante $L = 2$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence et l'unicité de la solution du problème (P).

2. L'equation différentielle du problème (P) est une équation à variables séparables qui s'ecrit:

$$\frac{dy}{y} = \left(\frac{1}{t}+1\right) dt$$

Par intégration on a:

$$\ln|y| = \ln|t| + t + c, c \in \mathbb{R}$$

Donc la solution de l'équation différentielle du problème (P) est $y(t) = kte^t$.

La condition initiale de (P) donne $k = 1$. la solution du problème (P) est donc $y(t) = te^t$.

3. On rappelle la formule d'Euler explicite: $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$

$y_0 = e$

$y(1.1) \approx y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) = e + hf(1, e) = 1.2e$

$y(1.2) \approx y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1) = 1.2e + hf(1.1, 1.2e) = 1.2e\left(1 + 0.1\left(\frac{1}{1.1} + 1\right)\right) = 1.2e\left(1.1 + \frac{0.1}{1.1}\right)$
$\approx 1.428e$
4. On rappelle la formule de la borne de l'erreur d'Euler , pour tout $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$, $h = \frac{1}{N}$

$$|y(t_n) - y_n| \leq \frac{Mh}{2L}\left(e^{L(t_n - t_0)} - 1\right)$$

avec $M = \max\limits_{t \in [1,2]} |y''(t)|$
Au point $t = 2$

$$|y(2) - y_N| \leq \frac{Mh}{4}\left(e^2 - 1\right)$$

Reste à déterminer M.
$y'(t) = e^t (t+1) \Rightarrow y''(t) = e^t (t+2) \Rightarrow y'''(t) = e^t (t+3)$.
On voit que la fonction $y''(t)$ est croissante et positive alors $M = 4e^2$.
Donc

$$|y(2) - y_N| \leq e^2\left(e^2 - 1\right) h$$

Exercice 3 (8 points)
Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction assez régulière et k-lipschitzienne par rapport à la seconde variable.
Pour résoudre numériquement le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), t_0 \leq t \leq T \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

on propose le schéma (S) suivant: Pour $y_0 \in \mathbb{R}$ donné on construit la suite $(y_n)_n$ comme suit:

$$y_{n+1} = y_n + h\left[(1-\alpha) f(t_n, y_n) + \alpha f(t_n + ah, y_n + bhf(t_n, y_n))\right]$$

avec $h \in \left]0, h^*\right], \alpha \in [0,1]$ et $a, b \in \mathbb{R}$.
a) Vérifier que le schéma (S) est consistant pour toutes les valeurs de α, a et b.
b) A quelle méthode correspond le cas $\alpha = 0$?
c) Déterminer les valeurs de $\alpha \neq 0, a$ et b pour que la méthode soit au moins d'ordre 2.
d) Etudier la stabilité du schéma (S). Conclure.
Solution
On pose $\phi(t, y, h) = (1-\alpha) f(t, y) + \alpha f(t + ah, y + bhf(t, y))$
a) Comme $\phi(t, y, 0) = (1-\alpha) f(t, y) + \alpha f(t, y) = f(t, y)$, le schéma (S) est consistant pour toutes les valeurs de α, a et b.
b) Si $\alpha = 0$ alors le schéma s'écrit $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$, c'est la méthode d'Euler explicite
c)

$$\frac{\partial}{\partial h}\phi(t, y, h) = \alpha a \frac{\partial}{\partial t} f(t + ah, y + bhf(t, y)) + \alpha b f(t, y) \frac{\partial}{\partial y} f(t + ah, y + bhf(t, y))$$

ce qui implique

$$\frac{\partial}{\partial h}\phi(t,y,0)=\alpha a\frac{\partial}{\partial t}f(t,y)+\alpha b f(t,y)\frac{\partial}{\partial y}f(t,y)$$

Pour que le schéma (S) soit au moins d'ordre 2, il faut et il suffit que

$$\frac{\partial}{\partial h}\phi(t,y,0)=\frac{1}{2}f^{[1]}(t,y)=\frac{1}{2}\left(f(t,y)+f(t,y)\frac{\partial}{\partial y}f(t,y)\right)$$

Ce qui est équivalent à

$$\begin{cases}\alpha a=\frac{1}{2}\\ \alpha b=\frac{1}{2}\end{cases}$$

Comme $\alpha\neq 0$ alors

$$a=b=\frac{1}{2\alpha}$$

d) Pour tout $h\in\left]0,h^*\right], t\in[t_0,T]$ et $y_1,y_2\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}|\phi(t,y_1,h)-\phi(t,y_2,h)| &\leq (1-\alpha)\,|f(t,y_1)-f(t,y_2)|+\\ &\quad \alpha\,|f(t+ah,y_1+bhf(t,y_1))-f(t+ah,y_2+bhf(t,y_2))|\\ &\leq k\,(1+\alpha bh^*k)\,|y_1-y_2|\end{aligned}$$

Donc ϕ est Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable avec une constante

$$L=k\,(1+\alpha bh^*k)\,.$$

Le schéma (S) est alors stable.

e) Conclusion

Pour toutes les valeurs de α, a et b le schéma (S) est consistant et stable il est convergent.

Si $\alpha=0$, on retrouve la méthode d'Euler et son ordre de convergence est égal à1.

Si $\alpha\neq 0$, l'ordre de convergence du schéma est au moins 2.