Faculté des Sciences 2018/2019
Département de Mathématiques Durée: 1h 30mn

Contrôle continu d'analyse numérique 2 (Corrigé)

Exercice 1 Soit
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
1. Indiquer si A est décomposable sous forme LU et donner la décomposition si c'est le cas.
2. Résoudre $Ax = b$
Solution
1. Calculons les mineurs principaux de A
$\delta_1 = 1 \neq 0, \delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ et $\delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$
Puisque tous les mineurs principaux de A sont non nuls alors, A est décomposable sous forme LU.
$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = U$
La matrice $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $Ax = b \Leftrightarrow LUx = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$
$Ly = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$Ux = y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$
La solution de $Ax = b$ est $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Exercice 2
1. Supposons que $Ax = b$ et $A\widetilde{x} = \widetilde{b}$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$et
$\left\| b - \widetilde{b} \right\|_\infty = 10^{-2}$,Donner la borne de l'erreur absolue de la solution $\|x - \widetilde{x}\|_\infty$.
2- Soient A et ΔA des matrices, b, x et Δx des vecteurs tels que:
$Ax = b$ et $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$. Montrer que

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \leq cond(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

Solution

1. On rappelle que

$$\frac{\|x-\widetilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq cond_\infty(A)\frac{\left\|b-\widetilde{b}\right\|_\infty}{\|b\|_\infty}$$

et $cond_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$
On a $\|A\|_\infty = 3$
Un simple calcul permet de donner $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \|A^{-1}\|_\infty = 1$
de plus $\|b\|_\infty = 1$ comme la solution de $Ax = b$ est $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ alors $\|x\|_\infty = 1$
Finalement

$$\|x-\widetilde{x}\|_\infty \leq cond_\infty(A)\frac{\left\|b-\widetilde{b}\right\|_\infty}{\|b\|_\infty}\|x\|_\infty \leq 0.03$$

2. $\begin{cases} (A+\Delta A)(x+\Delta x) = b \\ Ax = b \end{cases} \Rightarrow A\Delta x = \Delta A\,(x+\Delta x) \Rightarrow \Delta x = A^{-1}\Delta A\,(x+\Delta x)$
$\Rightarrow \|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|\,\|x+\Delta x\|$
$\Rightarrow \dfrac{\|\Delta x\|}{\|x+\Delta x\|} \leq \|A^{-1}\|\,\|A\|\,\dfrac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ *C.Q.F.D.*

Exercice 3

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ donné, on considère la matrice A_α

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 2 \end{pmatrix}$$

1. Ecrire la matrice B_J de la méthode itérative de Jacobi. Pour quelles valeurs de α cette méthode converge-t-elle?
2. Ecrire la matrice B_{GS} de la méthode itérative de Gauss-Seidel. Pour quelles valeurs de α la méthode de Gauss-Seidel converge-t-elle?

Solution

1. On pose $A_\alpha = D - E - F$ avec
$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$B_J = D^{-1}(E+F) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\alpha & 0 \\ -\frac{1}{2}\alpha & 0 & -\frac{1}{2}\alpha \\ 0 & -\frac{1}{2}\alpha & 0 \end{pmatrix}$
La méthode de Jacobi converge si et seulement si $\rho(B_J) < 1$.
Les valeurs propres de B_J sont $\lambda_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\alpha, \lambda_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\alpha$ et $\lambda_3 = 0$.
Ce qui implique $\rho(B_J) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,|\alpha|$.
$\rho(B_J) < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{2}\,|\alpha| < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{1}{2}\sqrt{2}\alpha < 1 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < \alpha < \sqrt{2}$.
En conclusion: La méthode de Jacobi converge si et seulement si $-\sqrt{2} < \alpha < \sqrt{2}$.
2.

$B_{GS} = (D-E)^{-1}F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \alpha & 2 & 0 \\ 0 & \alpha & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4}\alpha & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8}\alpha^2 & -\frac{1}{4}\alpha & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\alpha & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\alpha^2 & -\frac{1}{2}\alpha \\ 0 & -\frac{1}{8}\alpha^3 & \frac{1}{4}\alpha^2 \end{pmatrix}$
Comme la matrice A étant tridiagonale les méthodes Jacobi et Gauss-Seidel convergent ou divergent simultanément.
Donc, la méthode de Gauss-Seidel converge si et seulement si $-\sqrt{2} < \alpha < \sqrt{2}$.
Exercice 4 1. Montrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

est symétrique définie positive.
2. Déterminer la factorisation de Cholesky de A. Puis en déduire le déterminant de A.
Solution
1. D'après le théorème de Gershgorin, les valeurs propres de A appartiennent à $\underset{1\leq i\leq 3}{\cup} D_i$, avec

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C}, |z-4| \leq 2\} \text{ et } D_2 = D_3 = \{z \in \mathbb{C}, |z-4| \leq 1\}$$

Or, comme A est symétrique, ses valeurs propres sont réelles. Ce qui implique que les valeurs propres de A appartiennent à l'intervalle $[2, 6]$.
Par conséquent les valeurs propres de A sont strictement positives et donc A est symétrique définie positive.
2. Décomposition de Cholesky de A
Première colonne
$b_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{4} = 2$, $b_{21} = \dfrac{a_{21}}{b_{11}} = -\dfrac{1}{2}$, $b_{31} = \dfrac{a_{31}}{b_{11}} = -\dfrac{1}{2}$
Deuxième colonne
$b_{22} = \sqrt{a_{22} - b_{21}^2} = \sqrt{4 - \frac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{15}$, $b_{32} = \dfrac{a_{32} - b_{21}b_{31}}{b22} = -\dfrac{1}{2\sqrt{15}}$
Troisième colonne
$b_{33} = \sqrt{a_{33} - b_{31}^2 - b_{32}^2} = \sqrt{4 - \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4 \times 15}} = \dfrac{1}{2\sqrt{15}}\sqrt{4 \times 4 \times 15 - 15 - 1} = \dfrac{1}{2\sqrt{15}}\sqrt{16}\sqrt{14} =$
$\dfrac{2}{\sqrt{15}}\sqrt{14}$
Donc

$$A = BB^t$$

avec

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\sqrt{15} & 0 \\ -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2\sqrt{15}} & \dfrac{2}{\sqrt{15}}\sqrt{14} \end{pmatrix}$$

$\det(A) = \det(B)\det(B^t) = \det(B)^2 = 4 \times 14 = 56.$