Département de Mathématiques 2018/2019
Module: Analyse numérique 1
Fiche de T.P. N°5

Interpolation Polynomiale

I. Polynôme de Lagrange

Programmer une fonction **Interpolationlagrange(x,y,z)** où x est une séquence representant les abscisses des points d'appui, y est une séquence representant les ordonnées des points d'appui et z est la valeur à interpolée.
Utiliser la fonction précédente pour calculer la valeur du polynôme de Lagrange P qui interpole les points $(0,2), (1,1), (2,2)$ et $(3,3)$. Evaluer le polynôme P aux points : 0,0.5,1,1.5,2,2.5,3.

Application 1
On considère la fonction $f(x) = \exp(x)$
Représenter sur un même graphe la fonction f et P_n le polynôme d'interpolation de f aux noeuds equidistants entre$[0,2]$ pour $n = 5, 10, 20, 30, 40, 50$.
Tracer la courbe des erreurs $\max_{x\in[0,2]} |f(x) - P_n(x)|$ en fonction de n.
Qu'observez-vous ?

II. Polynôme de Newton

On donne les codes Python suivants.

```
def coef(x, y):
    # calcul des differences divisées
    n = len(x)
    a = []
    for i in range(n):
        a.append(y[i])
    for j in range(1, n):
        for i in range(n-1, j-1, -1):
            a[i] = float(a[i]-a[i-1])/float(x[i]-x[i-j])
    return a
def evaluation(a, x, z):
    # Evaluation du polynôme de Newton
    # p(x)=a[0]+a[1](x-x[0])+...+a[n](x-x[0])...(x-x[n-1])
    # avec l'algorithme de Horner
    n = len( a ) - 1
    temp = a[n]
    for i in range( n - 1, -1, -1 ):
        temp = temp * ( z - x[i] ) + a[i]
    return temp
```

Application 2

On considère la fonction

$$f_1(x) = \frac{\sin(3x)}{1+3x}, x \in [0,6]$$

Dans la figure (1) tracer la fonction f_1.Dans la figure (2), tracer le polynôme d'interpolation $p_5(x)$ de la fonction f_1 aux noeuds $x_i = \dfrac{6i}{5}, i = 0, 1, \ldots, 5$.Dans la figure (3) tracer l'erreur d'interpolation $e_5(x) = f_1(x) - p_5(x)$. Commenter

Dans la figure (4) tracer l'erreur d'interpolation $e_{12}(x) = f_1(x) - p_{12}(x)$. Commenter

Application 3

Soit la fonction de Runge définie par

$$f_2(x) = \frac{1}{1+25x^2}, x \in [-1,1]$$

On considère P_n le polynôme d'interpolation de f aux noeuds equidistants entre -1 et 1 avec $n = 5, 10$ et 20 successivement. Tracer les graphes de f , P_n et e_n.

Répéter les questions précédentes en remplaçant les noeuds équirépartis par les noeuds de Tchebychev définis par

$$x_i = \cos(\frac{2i+1}{2n+2}\pi), i = 0, \ldots, n$$

Qu'observez-vous ?