Département de Mathématiques 2018/2019
Module: Analyse numérique 1
Fiche de T.D. N°5

Interpolation et approximation

Exercice 1
Compléter le tableau des différences divisées suivant:

$x_0 = -1$	$f(x_0) = 2$			
$x_1 = 2$	$f(x_1) = 1$	$f[x_0, x_1] =$		
$x_2 = 3$	$f(x_2) = 0$	$f[x_1, x_2] =$	$f[x_0, x_1, x_2] =$	
$x_3 = 5$	$f(x_3) = 3$	$f[x_2, x_3] =$	$f[x_1, x_2, x_3] =$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3] =$

1. Utiliser la table ci-dessus pour calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré inférieur ou égal à 3 pour f aux noeuds x_0, x_1, x_2, x_3.
2. Utiliser le polynôme trouvé en 2. pour estimer $f(1)$.

Exercice 2
1. Déterminer les polynômes de Lagrange de degré un associés à la subdivision $x_0 = 0, x_1 = a$ où a est un réel donné strictement supérieur à 0.
2. Déterminer la forme de Lagrange du polynôme de degré un p_1 interpolant la fonction $f(x) = x^3$ aux même points $x_0 = 0$ et $x_1 = a$.
3. Démontrer par un calcul direct que pour tout $x \in [a, b]$, il existe un unique $\zeta \in]a, b[$ tel que:

$$f(x) - p_1(x) = \frac{f''(\zeta)}{2} x(x - a)$$

ensuite calculer ζ.
4. Répéter le même calcul pour la fonction $f(x) = (2x - a)^4$; montrer que dans ce cas, il y a deux valeurs possibles pour ζ. Calculer ces deux valeurs.

Exercice supplémentaire
Construire l'interpolation polynomiale de Lagrange de degré 1, notée p_1, d'une fonction f définie et continue sur l'intervalle $[-1, 1]$, interpolée aux points $x_0 = -1$ et $x_1 = 1$. Montrer que si f est de classe C^2 sur $[-1, 1]$, alors on a: $|f(x) - p_1(x)| \leq \dfrac{M_2}{2}(1 - x^2) \leq \dfrac{M_2}{2}, x \in [-1, 1]$,où $M_2 = \max\limits_{x \in [-1,1]} |f"(x)|$. Donner un exemple de fonction pour laquelle cette inégalité devient une égalité.

Exercice 3
Soit $x \in \mathbb{R}$ donné, soit p_n le polynôme de degré inférieur ou égal à n qui interpole f en $x_0, x_1, ..., x_n$, on veut évaluer l'erreur en x, c'est à dire $e_n(x) = f(x) - p_n(x)$. Si x est égal à l'un des t_i,l'erreur est nulle. Supposons maintenant que $x \neq x_i, \forall i = 0, \ldots, n$.
On définit alors le polynôme p par:

$$p(t) = p_n(t) + \prod_n(t) \frac{f(x) - p_n(x)}{\prod_n(x)} \qquad \text{où } \prod_n(t) = \prod_{i=0}^{n}(t - x_i).$$

1. Montrer que p interpole f aux points $\{x_0, x_1, ..., x_n, x\}$. Quel est le degré de p?
2. En déduire $p(t) - p_n(t)$ en fonction de $f[x_0, x_1, ..., x_n, x]$.
3. En déduire le calcul de l'erreur $e_n(x) = f(x) - p_n(x)$.

Exercice 4
soient $x_0, x_1, ..., x_n$ des points distincts d'un intervalle [a,b].
Démontrer que la différence divisée $f[x_0, x_1, ..., x_n]$ est une fonction symétrique pour toute permutation σ de 1,2,...,n

ie $\quad f[x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)}] = f[x_0, x_1, ..., x_n]$

indication: Montrer l'identité $f[x_0, x_1, ..., x_n] = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \prod_{0\le k\le n; k\ne j} (x_j - x_k)^{-1}$

Exercice 5

Soit (y_k) une suite réelle (ou complexe), on définit par récurrence $\Delta^n y_k$:

$$\Delta^{n+1} y_k = \Delta(\Delta^n y_k) = \Delta^n y_{k+1} - \Delta^n y_k \text{ avec } \Delta^0 y_k = y_k$$

1. Donner les expressions de $\Delta^1 y_k, \Delta^2 y_k, \Delta^3 y_k$.
2. Montrer que: $\Delta^n y_k = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_n^j y_{k+n-j}$. Que vaut $\Delta^n y_0$?

Exercice supplémentaire

1. Si $f(x) = x^2 + ax + b$, où a et b sont des constantes réelles. Calculer $\Delta^r f(x)$.($\Delta f(x) = f(x+h) - f(x), h > 0$)
2. En général, montrer que si $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ est un polynôme de degré n, alors $\Delta^n f(x) = n! h^n$ et $\Delta^{n+r} f(x) = 0$ pour $r = 1, 2, \ldots$.

Exercice 6

Déterminer le polynôme d'interpolation de Newton-Gregory progressif, $p_5(x)$ aux points d'appui donnés dans le tableau suivant puis interpoler la valeur de la fonction en $x = 0.0045$.

x_i	0	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005
y_i	1.121	1.123	1.1255	1.127	1.128	1.1285

Exercice 7

On veut tabuler la fonction $f(x) = \sin x$ aux points équidistants $x_j = jh, j \ge 0$.

1. Majorer l'erreur d'interpolation dans l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ lorsqu'on fait passer un polynôme de degré 3 par les points $x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}$.
2. Quel h peut-on prendre pour que cette erreur soit inférieure à 10^{-8} pour tout $i > 0$?

Exercice supplémentaire

On veut construire une table de valeurs de la fonction $f(x) = \sqrt{x+1}$ dans l'intervalle $[0,1]$ pour des points équidistants $x_{i+1} = x_i + h$.

Quelle valeur doit prendre h pour garantir 7 chiffres significatifs en faisant une interpolation quadratique?

Exercice 8

Trouver le polynôme $p(x) = a + bx + x^2$, qui ajuste les données suivantes au sens des moindres carrés.

$$(1.0, -1.1), (2.0, -0.9), (3.0, 1.0), (4.0, 4.8).$$

Exercice 9

Considérons les polynômes définis par: $p_0(x) = 1, p_1(x) = x$ et $p_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$.

1- Montrer que la famille $\{p_0, p_1, p_2\}$ est orthogonale sur $[-1, 1]$ par rapport à la fonction poids $\omega(x) = 1$.

2- Calculer le polynôme, meilleur approximation de e^x sur le sous espace vectoriel engendré par p_0, p_1et p_2.