Département de Mathématiques 2018/2019
Module: Analyse numérique 1
Fiche de T.D. N°3

Résolution des équations non linéaires (suite)

Exercice 1
Etant donnée l'équation $x^3 + 4x^2 = 10$ dans $[1, 2]$
a) Monter que l'equation précédente admet une solution unique dans $[1, 2]$.
b) Combien d'étapes sont nécessaire pour calculer cette solution avec la méthode de bissection à 10^{-4} près.
c) Etant donnés les formules itératives suivantes:

$$i) \qquad x_{n+1} = \left(\frac{10}{x} - 4x_n\right)^{1/2} \qquad ii) \qquad x_{n+1} = \left(\frac{10}{4+x_n}\right)^{1/2}$$

Analyser la convergence des méthodes $i)$ et $ii)$ vers cette solution.
d) Ecrire la formule itérative de Newton. Quel est son ordre de convergence?
la racine est approximativement $\alpha = 1.3652$.

Exercice 2
(a) Donner la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définissant la méthode de Newton pour la résolution de l'équation $f(x) = 0$, avec $f \in C^1$ et f' ne s'annule pas. Justifier géométriquemet l'expression de cette suite.
(b) Quel est l'ordre de convergence de la méthode?Justifier, en utilisant un développement de Taylor approprié à la fonction f Y a-t-il des situations dans lesquelles l'ordre de convergence est plus élevé?
(c) On veut approcher la racine $\alpha = 0$ de $f(x) = x^2$. On utilise la fonction d'itération $g(x) = x - a\frac{f(x)}{f'(x)}$ avec a un paramètre réel. Pour quelles valeurs de a a t-on une convergence locale? Etudier l'ordre de convergence en fonction de a.

Exercice 3
1. En appliquant la méthode de Newton à $f(x) = x^2 - 1$ avec x_0 proche de $\alpha = 1$, que valent les limites suivantes:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^2} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^3}$$

2. Même question pour $f(x) = (x+2)(x-3)^2$ avec x_0 proche de $\alpha = 3$.

Exercice 4
On suppose que $f(x) = x^2 - 2$. Soit x_n la suite engendrée par la méthode de Newton à partir de $x_0 = 1$.
1. Montrer par recurrence que $x_n \geq 1$ puis que $\left|x_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \dfrac{1}{2}\left|x_n - \sqrt{2}\right|^2$.
2. En déduire que $\left|x_n - \sqrt{2}\right| \leq \dfrac{1}{2^{2^n}}$.
3.Combien de décimales exactes obtient-on avec x_5? Avec x_{10}?

Département de Mathématiques 2018/2019
Module: Analyse numérique 1
Fiche de T.D. N°4

Interpolation polynômiale

Exercice 1
Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange p de $f(x) = \cos(\pi x)$ associé aux points $0, \pi/4, \pi/6$. Calculer $p(\pi/5)$. Estimer l'erreur d'interpolation au point $\pi/5$ puis comparer avec l'erreur effective.
Exercice 2
Trouver le polynôme de l'espace $\mathrm{span}\{1 + x^2, x^4\}$ qui interpole les points $(0, 1)$ et $(1, 3)$.
Exercice 3
1. Construire le polynôme de Lagrange P qui interpole les points $(-1, 1), (0, 1), (1, 2)$ et $(2, 3)$.
2. Soit Q le polynôme de Lagrange qui interpole les points $(-1, 1), (0, 1)$ et $(1, 2)$. Montrer qu'il existe un réel λ tel que :
$Q(x) - P(x) = \lambda (x + 1) x (x - 1)$.
Exercice 4
Soit $I = [a, b]$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\{x_0, \ldots, x_n\} \in I$ et p_n le polynôme d'interpolation de f associé aux points $x_0, \ldots, x_n$. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses?
1. Si p_n est un polynôme constant alors n est nécessairement égal à 0.
2. Si $n > 1$ et p_n est un polynôme constant alors f est nécessairement constante.
3. Si $n = 1$ et f est une fonction croissante (resp. décroissante) sur I alors p_n est croissante (resp. décroissante) sur I.
4. Même question lorsque $n = 2$.
Exercice 5
On considère une fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$. Soit p le polynôme de degré un qui interpole f sur les points d'appui x_0, x_1.
1. Etudier la fonction $x \mapsto (x - 1)(x + 1)$ pour $x \in [-1, 1]$.
2. Même question pour la fonction $x \mapsto (x - \frac{\sqrt{2}}{2})(x + \frac{\sqrt{2}}{2})$.
3. Pour réaliser une interpolation numérique d'une fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$,quels points d'appui $\{x_0, x_1\}$ doit on choisir $\{x_0, x_1\} = \{-1, 1\}$ ou $\{x_0, x_1\} = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$? Pourquoi?
4. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré 1 de $x \mapsto x^3$ qui interpole f sur $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ et donner une majoration de l'erreur pour tout $x \in [-1, 1]$.